This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Eng. 498.8

ESTUDIOS

SOBRE

NIVELACIÓN GEODÉSICA

POR

D. CARLOS IBÁÑEZ É IBÁÑEZ DE IBERO,

MARISCAL DE CAMPO,

DIRECTOR GENERAL DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO, VICEPRESIDENTE DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

PUBLICADOS DE REAL ORDEN,

á propuesta de la Junta general de Estadística, en 1864.

SEGUNDA EDICIÓN.

MADRID.

IMPRENTA DE LA DIRECCIÓN GENERAL DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO.

1888.

ESTUDIOS

SOBRE

NIVELACIÓN GEODÉSICA.

ESTUDIOS

SOBRE

NIVELACIÓN GEODÉSICA

POR

D. CARLOS IBÁÑEZ É IBÁÑEZ DE IBERO,

MARISCAL DE CAMPO,

DIRECTOR GENERAL DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO, VICEPRESIDENTE DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

PUBLICADOS DE REAL ORDEN,

á propuesta de la Junta general de Estadística, en 1864.

SEGUNDA EDICIÓN.

MADRID.

IMPRENTA DE LA DIRECCIÓN GENERAL DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO.

1888.

Eng 4.8.88

HARVARD COLLEGE
JUL 23 1906
LIBRARY.

Instituto Geográfico
y Estadístico

INTRODUCCIÓN.

Son tantos y de tal magnitud los proyectos de vías de comunicación formados en el transcurso de los últimos treinta años, es tan considerable el número de los que han llegado á realizarse en diferentes regiones del Globo, que las nivelaciones topográficas han adquirido el más vasto desarrollo, siendo objeto de la atención especial de algunos Ingenieros, que han perfeccionado notablemente la parte práctica de estos trabajos, llevados á cabo en el día con celeridad y suficiente precisión.

De los buenos resultados obtenidos por el método de visuales horizontales á muy cortas distancias, empleado forzosamente en los trabajos á que me refiero, se han deducido consecuencias exageradas: se ha intentado demostrar que por este sistema podía alcanzarse una exactitud muy superior á la que se obtiene en realidad; se ha propuesto emplearlo exclusivamente en todas las determinaciones de desniveles, aun en el caso en que, hallándose los puntos á largas distancias, no fuera indispensable conocer las diferencias de altura de un gran número de los intermedios;

se ha tratado de proscribir los procedimientos trigonométricos, fundándose, sin duda, en la opinión de un conocido escritor, que supone *imposible obtener ninguna precisión en las nivelaciones geodésicas*, á causa de las irregularidades de la refracción terrestre.

Me ha parecido, pues, oportuno estudiar esta cuestión, con motivo de haber acordado recientemente la Junta general de Estadística que se emprenda á la mayor brevedad posible la extensa nivelación entre el Océano Cantábrico y el Mediterráneo, para determinar las alturas, sobre el nivel medio de los mares, de numerosos puntos trigonométricos de la Península, que sirvan de referencias en la formación del Mapa; deduciendo, además, la altitud del Real Observatorio Astronómico de Madrid, dato importantísimo para una multitud de trabajos, y que no se conoce sino con una incertidumbre inadmisible en el estado actual de la ciencia.

El examen comparado de las nivelaciones geodésicas especiales hechas en distintos países, y la aplicación de una teoría presentada hace veinticinco años por el ilustre Biot, y de la que no se ha hecho uso en operación alguna de las que han visto la luz pública, forman la primera parte de este trabajo, y llenan el objeto principal que me propuse al emprenderlo.

Pero ya que en nivelaciones me ocupaba, creí conveniente examinar, además de los métodos que pueden emplearse en las operaciones especiales llevadas á cabo con el único fin de conocer la tercera coordenada de cierto número de puntos trigonométricos, los sistemas aplicables á la determinación de

los desniveles en los lados geodésicos de nuestra triangulación de primer orden, y muy principalmente en los que constituyen la red trigonométrica de segundo, que podría presentar varias líneas de nivelación convenientemente elegidas para suministrar importantes datos, al mismo tiempo que se observasen los ángulos azimutales, y con muy poco más trabajo del que requiere la simple medición de las distancias aparentes al cenit. Para reunir algunos resultados experimentales obtenidos en circunstancias desfavorables, y que pudiesen considerarse como un caso extremo, al cual no debe llegarse nunca en la práctica, propuse que se determinase directamente, con arreglo al plan que me pareció más adecuado, la diferencia de nivel entre el Observatorio de Madrid y la villa de Ocaña, vértices geodésicos separados por una distancia de 52½ kilómetros; y habiendo aprobado mi pensamiento el Excmo. señor D. Alejandro Oliván, Vicepresidente de la Junta de Estadística, fueron nombrados el Capitán de Ingenieros Don Joaquín Barraquer y el de Artillería D. Francisco Cabello, para ejecutar conmigo esta operación. El Sr. Barraquer se encargó de las observaciones en Ocaña y de todos los cálculos relativos á aquella estación, habiendo observado yo en Madrid con el Sr. Cabello, el cual verificó los cálculos de nuestras observaciones. En la segunda parte de esta Memoria describo extensamente la indicada nivelación.

Grande es la diferencia que existe entre los trabajos que pueden hacerse en toda la extensión del territorio de un Estado por métodos expeditos, al mismo tiempo que se verifica la triangulación, y los que se realizan en determinadas líneas

especiales empleando todos los recursos de la geodesia. Los primeros, aunque de indisputable utilidad, no alcanzan generalmente el grado de exactitud que se exige para ciertos usos; pero la ciencia tiene medios de dar á los segundos la precisión necesaria para toda clase de aplicaciones, y esto es lo que me propongo demostrar en el siguiente escrito.

MADRID, 1864.

PARTE PRIMERA.

Cuando se conoce la magnitud del arco terrestre comprendido entre dos puntos visibles entre sí, puede determinarse geodésicamente y con suficiente precisión la diferencia de nivel que existe entre ellos, por tres métodos diferentes:

1.° Observando simultáneamente en cada uno la distancia cenital del otro, reiterando convenientemente la operación y combinando después cada dos observaciones simultáneas; pudiendo así prescindir de la refracción, si se supone que la trayectoria luminosa es simétrica con respecto á la recta que une los dos puntos; cuya hipótesis introducirá un error muy pequeño cuando la diferencia de nivel no sea considerable;

2.° Eligiendo una estación situada á igual distancia de los dos puntos, y determinando la diferencia de nivel á cada uno de ellos por medio de sus distancias cenitales, observadas de dos en dos en el menor tiempo posible, y consideradas, por lo tanto, como simultáneas. La hipótesis que se admite en este caso es que las dos tangentes á las trayectorias luminosas en la estación intermedia forman ángulos iguales con las rectas que la unen á los dos puntos extremos, lo cual supone que el terreno ofrezca simetría en ambas direcciones;

3.° Observando en uno de los puntos la distancia cenital del otro, y simultáneamente en ambos las presiones atmosféricas y las temperaturas del aire; verificando iguales observaciones recíprocas, si bien en época diferente, en el punto que ha servido de mira.

Me ocuparé separadamente de cada uno de estos métodos.

I.

En el año de 1818, cuando se observaba con círculos repetidores, cuyos inconvenientes para la medición de distancias cenitales son hoy bien conocidos, emprendieron los señores Bonne, Epailly y Béraud una nivelación especial entre París y el puerto de Brest, para determinar por medio de distancias cenitales recíprocas y simultáneas, observadas de día y de noche, la altura de la cúpula del Panteón sobre el nivel medio de las aguas del Océano. El promedio de la longitud de los lados no llegaba á $29\,000^m$, siendo el mayor de $42\,000^m$; la diferencia de nivel más considerable fué de 174^m, y el promedio de todas no llegó á 80^m.

En las observaciones hechas de día se emplearon como señales, según las circunstancias, la parte superior de la cúpula ó la bola de los campanarios de los pueblos, miras de madera colocadas en torres de iglesias y el mayor número de veces pirámides cuadrangulares con una mira plana en su cúspide. De noche se usaron luces de reverbero, convenientemente

situadas para determinar con la necesaria exactitud todos los datos de reducción.

Los instrumentos con que se midieron las distancias cenitales fueron dos círculos repetidores, construídos, uno por Richer y otro por Bellet; los nonios permitían leer directamente veinte segundos centesimales, y hasta diez segundos por apreciación. Los observadores hicieron un examen comparativo de ambos círculos, para cerciorarse de que un error instrumental constante no había de afectar la precisión del resultado.

Cada valor de una distancia cenital resultaba de una serie de veinte repeticiones, y el número de series varió entre uno y siete, siendo cuatro el término medio de las que se hicieron en las diferentes estaciones.

Deseando presentar los elementos de las principales nivelaciones ejecutadas en varios países, de manera que puedan compararse entre sí por medio de una medida común de precisión, he calculado para todas ellas los errores probables, tanto de los desniveles parciales como de los resultados definitivos.

Designando:

l... el lado comprendido entre los dos puntos que se consideran, después de reducir su longitud al nivel del mar,

z', z''... las distancias cenitales observadas simultáneamente en las estaciones inferior y superior,

d... el desnivel que existe entre ambas,

se tendrá, para los trabajos especiales de nivelación:

$$d = l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (z'' - z'). \tag{1}$$

Representando por:

$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots$ las diferencias de cada uno de los valores de $\frac{1}{2}(z''-z')$ con su promedio,

$n \ldots$ el número de valores de $\frac{1}{2}(z''-z')$, para un par de estaciones,

$e_1, e_2, e_3, \ldots$ los errores probables relativos á cada una de las diferencias de nivel,

$\Delta \ldots$ el error probable del resultado de la nivelación, será:

$$(2) \qquad e_1 = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 + \cdots}{n-1}}$$

$$(3) \qquad \Delta = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \cdots}$$

Después de reducir á la división sexagesimal las distancias cenitales publicadas en grados centesimales por el Depósito de la Guerra de Francia (*), he formado el siguiente *Estado*, en que aparecen los resultados parciales de la combinación de cada dos distancias cenitales observadas simultáneamente, las diferencias con el promedio para cada lado, los errores probables en arco y en metros, y, por último, el error probable de la operación.

(*) *Nouvelle description géométrique de la France.* Première partie. Par L. Puissant, Colonel d'État-Major. — Paris, 1832.

NIVELACIÓN ENTRE PARÍS Y BREST.

LADOS.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	ERRORES PROBABLES.	
	° ′ ″	″	″	m
N.° 1.	0 12 1,87	— 0,22	0,4519	0,093
	0,90	+ 0,75		
	2,19	— 0,54		
	0 12 1,65	0,50		
N.° 2.	0 17 9,67	— 2,27	1,6255	0,253
	7,89	— 0,49		
	8,05	— 0,65		
	4,00	+ 3,40		
	0 17 7,40	1,70		
N.° 3.	0 2 46,37	— 2,27	1,6930	0,268
	45,08	— 0,98		
	44,43	— 0,33		
	40,54	+ 3,56		
	0 2 44,10	1,78		
N.° 4.	0 8 34,67	— 1,42	2,2798	0,404
	35,00	— 1,75		
	35,16	— 1,91		
	28,19	+ 5,06		
	0 8 33,25	2,53		
N.° 5.	0 9 58,26	+ 4,46	6,0840	0,943
	58,26	+ 4,46		
	58,10	+ 4,62		
	76,25	— 13,53		
	0 10 2,72	6,77		
N.° 6.	0 19 35,31	— 3,03	2,0235	0,300
	32,23	+ 0,05		
	29,31	+ 2,97		
	0 19 32,28	2,02		
N.° 7.	0 12 13,86	— 0,49	1,3288	0,244
	14,99	— 1,62		
	14,34	— 0,97		
	13,70	— 0,33		
	9,97	+ 3,40		
	13,37	1,36		

LADOS.	$\frac{1}{2}(z''-z)$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	ERRORES PROBABLES.	
	° ′ ″	″	′	m
N.° 8.	0 1 12,74	+ 1,67	1,3490	0,166
	13,87	+ 0,54		
	16,62	— 2,21		
	0 1 14,41	1,47		
N.° 9.	0 3 5,49	+ 1,29	1,2343	0,185
	6,78	0,00		
	8,08	— 1,30		
	0 3 6,78	0,86		
N.° 10.	0 10 39,25	— 8,08	3,0757	0,429
	33,09	— 1,92		
	31,31	— 0,14		
	28,23	+ 2,94		
	26,94	+ 4,23		
	28,23	+ 2,94		
	0 10 31,17	3,37		
N.° 11.	0 4 18,06	+ 1,35	2,8936	0,357
	24,22	— 4,81		
	15,96	+ 3,45		
	0 4 19,41	3,20		
N.° 12.	0 0 48,44	+ 0,18	1,6323	0,211
	44,87	+ 3,75		
	47,14	+ 1,48		
	48,27	+ 0,35		
	49,57	— 0,95		
	52,81	— 4,19		
	49,25	— 0,63		
	0 0 48,62	1,65		
N.° 13.	0 14 25,40	— 4,48	4,6810	0,302
	24,43	— 3,51		
	12,93	+ 7,99		
	0 14 20,92	5,33		

$$\Delta = \pm 1^{m},362$$

Este resultado es muy satisfactorio en una nivelación que comprende una línea de 400 kilómetros, si se atiende á los defectos inherentes á las señales é instrumentos empleados, y á que en algunos casos la simultaneidad de las observaciones no fué todo lo perfecta que hubiera sido de desear.

El sabio General Baeyer, siendo Comandante de Estado Mayor en 1 835, llevó á cabo, en unión del Ingeniero geógrafo Sr. Bertram, una de las operaciones más notables de esta clase que cuenta en sus anales la geodesia moderna. Tal fué la nivelación entre Berlín y el puerto de Swinemünde, que dió á conocer definitivamente la altura de la capital de Prusia sobre las aguas medias del Báltico. La extensión de 200 kilómetros, que abrazaba la línea de nivelación, fué dividida en doce lados por medio de once puntos, elegidos de suerte, que la mayor de las distancias entre dos inmediatos apenas pasaba de 30 000^{m}, siendo el promedio de todas ellas de 17 000^{m}; y presentando un máximo desnivel de 160^{m}, con un promedio general de 80^{m}.

Las señales empleadas fueron el heliotropo de Gauss para las grandes distancias, y para las más cortas la mira cuadrada de medio metro de lado, pintada de blanco, con una faja negra horizontal de una anchura igual á la tercera parte del lado. La puntería se hacía con grande exactitud sobre ambas señales, ofreciendo la segunda la ventaja de poderse observar con el cielo nublado, lo cual no puede verificarse con el heliotropo, que obliga algunas veces á suspender los trabajos en días sumamente favorables para la observación.

Las distancias cenitales recíprocas se observaron simultá-

neamente con dos teodolitos, uno de Ertel, de Munich, y otro construído en París por Gambey. El primero tenía un círculo vertical de $0^m,21$ de diámetro, en el que se apreciaban $4''$ por medio de cuatro nonios; el valor de una parte del nivel era $17'',71$, y el retículo del anteojo se componía de dos hilos horizontales y dos verticales, que dejaban en el centro del campo un pequeño cuadrado para observar la señal. El anteojo del teodolito de Gambey se hallaba colocado excéntricamente respecto del círculo azimutal; el retículo era de dos hilos horizontales y uno vertical; en el círculo de alturas, de $0^m,31$ de diámetro, se apreciaban $3''$ por medio de cuatro nonios, y á cada división del nivel correspondía un valor angular de $3'',63$.

En el teodolito de Ertel no era de temer un error apreciable, debido á la flexión del anteojo en la medición de distancias cenitales, porque la forma del tubo, compuesto de dos conos unidos por sus bases, es á propósito para atenuar considerablemente el efecto de la gravedad en el ocular y el objetivo; se hicieron, sin embargo, experiencias para determinar el indicado error, las cuales dieron por resultado, que no debía aplicarse corrección alguna á los ángulos de altura observados con este instrumento. No sucedió otro tanto con el teodolito de Gambey, pues de las experiencias resultó que las observaciones cenitales hechas con él debían sufrir una corrección sustractiva de $2'',68$.

Por medio de ocultaciones del heliotropo ó de señales hechas con una mira, se aseguró completamente la simultaneidad de las observaciones. El número de distancias cenitales

simples, medidas en cada uno de los vértices de la línea poligonal de nivelación, varió entre 30 y 44, siendo de 35 el término medio.

De los numerosos datos publicados por el general Baeyer (*) he extractado lo necesario para formar los tres *Estados* siguientes, análogos al de la pág. 13, en los cuales se presentan, reducidos á medidas métricas, los errores probables parciales que me han servido para calcular el error general de la operación.

(*) *Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin.* Auf dienstliche Veranlassung ausgeführt von J. J. Baeyer, Major im Generalstabe. — Berlín, 1840.

NIVELACIÓN ENTRE BERLÍN Y SWINEMÜNDE.

LADO N.° 1.		LADO N.° 2.		LADO N.° 3.		LADO N.° 4.	
$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
0 53 30,12	+ 1,36	0 4 22,54	− 3,16	0 11 49,93	+ 3,24	0 6 9,55	− 0,50
29,15	+ 2,33	20,79	− 4,91	50,54	+ 2,63	10,45	+ 0,40
27,44	+ 4,04	20,84	− 4,86	53,87	− 0,70	8,09	− 1,96
28,97	+ 2,51	21,69	− 4,01	56,81	− 3,64	9,62	− 0,43
30,70	+ 0,78	23,00	− 2,70	56,57	− 3,40	10,05	0,00
31,70	− 0,22	23,03	− 2,67	54,87	− 1,70	6,59	− 3,46
31,05	+ 0,43	18,82	− 6,88	54,94	− 1,77	4,88	− 5,17
29,92	+ 1,56	20,75	− 4,95	57,02	− 3,85	5,35	− 4,70
31,21	+ 0,27	27,97	+ 2,27	55,70	− 2,53	9,15	− 0,90
31,11	+ 0,37	28,32	+ 2,62	54,00	− 0,83	5,93	− 4,12
33,73	− 2,25	25,67	− 0,03	53,36	− 0,19	6,60	− 3,45
32,72	− 1,24	24,39	− 1,31	51,54	+ 1,63	5,61	− 4,44
31,92	− 0,44	26,73	+ 1,03	56,97	− 3,80	13,82	+ 3,77
33,70	− 2,22	24,39	− 1,31	53,33	− 0,16	15,53	+ 5,48
30,49	+ 0,99	26,86	+ 1,16	55,90	− 2,73	12,64	+ 2,59
30,29	+ 1,19	27,98	+ 2,82	54,22	− 1,05	9,98	− 0,07
29,67	+ 1,81	23,08	− 2,62	57,09	− 3,92	11,64	+ 1,59
32,32	− 0,84	27,22	+ 1,52	58,73	− 5,56	11,00	+ 0,95
31,95	− 0,47	26,81	+ 1,11	54,51	− 1,34	13,44	+ 3,39
29,11	+ 2,37	26,07	+ 0,37	54,70	− 1,53	11,47	+ 1,42
29,84	+ 1,64	26,46	+ 0,76	58,29	− 5,12	15,10	+ 5,05
29,45	+ 2,03	27,44	+ 1,74	57,10	− 3,93	12,92	+ 2,87
33,52	− 2,04	27,06	+ 1,36	51,96	+ 1,21	10,28	+ 0,23
32,64	− 1,16	26,18	+ 0,48	51,98	+ 1,19	11,22	+ 1,17
35,18	− 3,70	25,29	− 0,41	57,95	− 4,78	12,49	+ 2,44
30,89	+ 0,59	27,90	+ 2,20	54,39	− 1,22	9,27	− 0,78
30,91	+ 0,57	26,43	+ 0,73	48,49	+ 4,68	9,91	− 0,14
33,60	− 2,12	27,26	+ 1,56	54,35	− 1,18	9,69	− 0,36
30,93	+ 0,55	28,27	+ 2,57	53,34	− 0,17	10,19	+ 0,44
34,30	− 2,82	29,70	+ 4,00	54,08	− 0,91	8,91	− 1,14
32,04	− 0,56	28,45	+ 2,75	49,11	+ 4,06		
33,90	− 2,42	29,28	+ 3,58	49,57	+ 3,60	0 6 10,05	2,10
34,40	− 2,92	31,32	+ 5,62	47,88	+ 5,29		
				46,18	+ 6,99		
0 53 31,48	1,54	0 4 25,70	2,41	46,25	+ 6,92		
				48,81	+ 4,36		
				48,81	+ 4,36		
				51,76	+ 1,41		
				51,83	+ 1,34		
				49,90	+ 3,27		
				0 11 53,17	2,80		

$e_1 = 1'',3 \ldots 0^m,025$ $e_2 = 2'',0 \ldots 0^m,302$ $e_3 = 2'',4 \ldots 0^m,222$ $e_4 = 1'',8 \ldots 0^m,160$

LADO N.° 5.		LADO N.° 6.		LADO N.° 7.		LADO N.° 8.	
$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
0 2 5,94	− 3,12	0 11 34,89	− 0,21	0 2 38,56	− 2,38	0 9 34,42	+ 0,07
7,64	− 1,42	31,77	+ 2,91	42,84	+ 1,90	36,29	− 1,80
9,55	+ 0,49	32,27	+ 2,41	46,32	+ 5,38	33,07	+ 1,42
10,03	+ 0,97	32,65	+ 2,03	44,74	+ 3,80	38,18	− 3,69
11,85	+ 2,79	34,73	− 0,05	42,54	+ 1,60	34,53	− 0,04
12,18	+ 3,12	33,41	+ 1,27	41,47	+ 0,53	38,07	− 3,58
14,00	+ 4,94	31,85	+ 2,83	43,22	+ 2,28	37,55	− 3,06
11,55	+ 2,49	32,38	+ 2,30	42,90	+ 1,96	34,99	− 0,50
11,81	+ 2,75	37,11	− 2,43	39,48	− 1,46	37,55	− 3,06
12,13	+ 3,07	38,00	− 3,32	40,30	− 0,64	30,81	+ 3,68
12,01	+ 2,95	35,61	− 0,93	38,36	− 2,58	30,63	+ 3,86
11,14	+ 2,08	40,15	− 5,47	40,52	− 0,42	27,08	+ 7,41
5,69	− 3,37	41,52	− 6,84	41,31	+ 0,37	30,10	+ 4,39
7,22	− 1,84	39,15	− 4,47	40,70	− 0,24	28,83	+ 5,66
8,92	− 0,14	40,06	− 5,38	37,77	− 3,17	30,84	+ 3,65
8,77	− 0,29	40,19	− 5,51	39,29	− 1,65	34,92	− 0,43
7,59	− 1,47	29,60	+ 5,08	37,91	− 3,03	33,72	+ 0,77
6,89	− 2,17	29,16	+ 5,52	39,50	− 1,44	30,50	+ 3,99
6,94	− 2,12	29,61	+ 5,07	42,27	+ 1,33	34,06	+ 0,43
8,66	− 0,40	29,30	+ 5,38	39,82	− 1,12	32,00	+ 2,49
5,16	− 3,90	27,04	+ 7,64	38,06	− 2,88	28,48	+ 6,01
5,70	− 3,36	27,09	+ 7,59	41,09	+ 0,15	32,23	+ 2,26
8,76	− 0,30	27,46	+ 7,21	36,40	− 4,54	39,25	− 4,76
8,99	− 0,07	29,22	+ 5,46	40,10	− 0,84	39,99	− 5,50
11,51	+ 2,45	28,75	+ 5,93	38,34	− 2,60	36,96	− 2,47
10,33	+ 1,27	28,11	+ 6,56	41,20	+ 0,26	36,46	− 1,97
9,93	+ 0,87	28,00	+ 6,68	39,89	− 1,05	34,90	− 0,41
10,17	+ 1,11	28,14	+ 6,54	42,11	+ 1,17	33,39	+ 1,10
5,41	− 3,65	38,44	− 3,76	43,60	+ 2,66	36,00	− 1,51
7,62	− 1,44	35,89	− 1,21	46,47	+ 5,53	33,48	+ 1,01
8,50	− 0,56	37,07	− 2,39	42,00	+ 1,06	38,60	− 4,11
8,11	− 0,95	37,18	− 2,50			41,45	− 6,96
7,47	− 1,59	38,54	− 3,86	0 2 40,94	1,94	38,96	− 4,47
10,91	+ 1,85	39,65	− 4,97				
7,89	− 1,17	38,24	− 3,56			0 9 34,49	2,93
		39,91	− 5,23				
0 2 9,06	1,90	37,57	− 2,89				
		36,78	− 2,10				
		36,15	− 1,47				
		38,17	− 3,49				
		39,28	− 4,60				
		38,23	− 3,55				
		39,49	− 4,81				
		38,00	− 3,32				
		0 11 34,68	4,02				

$e_5 = 1'',6 \ldots 0^m,132$ $e_6 = 3'',39 \ldots 0^m,447$ $e_7 = 1'',6 \ldots 0^m,175$ $e_8 = 2'',5 \ldots 0^m,175$

LADO N.° 9.		LADO N.° 10.		LADO N.° 11.		LADO N.° 12.	
$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
0 9 37,62	− 0,42	0 8 47,55	− 2,70	0 0 14,18	+ 4,44	0 40 28,17	− 0,62
37,09	− 0,95	45,03	− 5,22	14,56	+ 4,06	31,10	+ 2,31
36,36	− 1,68	48,16	− 2,09	14,69	+ 3,93	34,21	+ 5,42
36,22	− 1,82	48,31	− 1,94	18,49	+ 0,13	33,80	+ 5,01
36,57	− 1,47	48,41	− 1,84	20,93	− 2,31	31,52	+ 2,73
36,12	− 1,92	47,22	− 3,03	20,39	− 1,77	32,12	+ 3,33
35,24	− 2,80	48,62	− 1,63	20,55	− 1,93	28,26	− 0,53
32,97	− 5,07	48,10	− 2,15	20,62	− 2,00	30,81	+ 2,02
35,40	− 2,64	51,20	+ 0,95	16,32	+ 2,30	25,39	− 3,40
38,44	+ 0,40	49,52	− 0,73	19,14	− 0,52	26,44	− 2,35
36,79	− 1,25	48,14	− 2,11	18,80	− 0,18	26,75	− 2,04
41,83	+ 3,79	54,15	+ 3,90	16,81	+ 1,81	28,23	− 0,56
43,70	+ 5,66	54,52	+ 4,27	18,35	+ 0,27	26,72	− 2,07
46,51	+ 8,47	54,23	+ 3,98	15,45	+ 3,17	28,36	− 0,43
39,48	+ 1,44	48,93	− 1,32	16,57	+ 2,05	28,37	− 0,42
38,06	+ 0,02	51,07	+ 0,82	16,12	+ 2,50	27,29	− 1,50
38,62	+ 0,58	53,09	+ 2,84	12,58	+ 6,04	27,75	− 1,40
37,94	− 0,10	54,62	+ 4,37	15,47	+ 3,15	30,28	+ 1,49
36,89	− 1,15	49,58	− 0,67	16,96	+ 1,66	30,01	+ 1,22
37,66	− 0,38	52,26	+ 2,01	15,04	+ 3,58	24,88	− 3,92
38,91	+ 0,87	52,01	+ 1,76	19,38	− 0,76	29,15	+ 0,36
41,69	+ 3,65	53,84	+ 3,59	17,63	+ 0,99	26,89	− 1,90
37,86	− 0,18	50,17	− 0,08	16,96	+ 1,66	25,02	− 3,77
38,11	+ 0,07	54,97	+ 4,72	17,55	+ 1,07	25,77	− 3,02
37,26	− 0,78	52,45	+ 2,20	16,85	+ 1,77	27,93	− 0,86
40,69	+ 2,65	52,23	+ 1,98	19,96	− 1,34	29,54	+ 0,75
37,03	− 1,01	49,40	− 0,85	20,08	− 1,46	25,18	− 3,61
32,14	− 5,90	46,91	− 3,34	19,38	− 0,76	29,48	+ 0,69
37,41	− 0,63	48,09	− 2,16	21,64	− 3,02	31,11	+ 2,32
34,27	− 3,77	48,37	− 1,88	22,70	− 4,08	32,08	+ 3,29
32,44	− 5,60	49,03	− 1,22	23,00	− 4,38	27,86	− 0,93
35,94	− 2,10	49,01	− 1,24	21,36	− 2,74	30,96	+ 2,17
40,21	+ 2,17	48,64	− 1,61	18,74	− 0,12		
47,08	+ 9,04	49,68	− 0,57	23,96	− 5,34	0 40 28,79	2,06
40,70	+ 2,66	51,19	+ 0,94	23,45	− 4,83		
				25,77	− 7,15		
0 9 38,04	2,37	0 8 50,25	2,19				
				0 0 18,62	2,48		

$e_9 = 2'',0 \ldots 0^m,214$ $e_{10} = 1'',9 \ldots 0^m,107$ $e_{11} = 2'',1 \ldots 0^m,158$ $e_{12} = 1'',7 \ldots 0^m,016$

$$\Delta = \pm\, 0{,}726$$

También citaré una nivelación geodésica hecha en España entre los dos extremos de la base de Madridejos, y un punto trigonométrico, situado en la inmediación de aquella línea. Este trabajo, que ejecuté en 1 859, en unión con el Ilmo. Sr. Don Frutos Saavedra Meneses, Jefe entonces en el Cuerpo de Artillería, y el Coronel, Comandante de Estado Mayor, D. Cesáreo Quiroga, es el más moderno de los de su clase, y ofrece, como término de comparación, la ventaja de haberse llevado á cabo con excelentes instrumentos, y haciendo uso de los mejores métodos de observación que se conocen. La distancia entre los dos extremos de la base no llega á 15 000^{m}, y la longitud de los otros dos lados del triángulo es igualmente menor de 8 000^{m}; presentando estos lados menores un desnivel de unos 90^{m}, y el mayor poco más de 2^{m}, con la circunstancia desfavorable de pasar las trayectorias luminosas muy próximas al terreno, en una llanura en que se hacen sentir extraordinariamente los efectos del calor.

Eligiéronse para señales unas miras planas que tenían, en fondo blanco, dos fajas negras en forma de cruz, cuya imagen se centraba perfectamente dentro del pequeño cuadrado formado por los hilos principales de los retículos de los instrumentos que se emplearon.

Éstos eran dos grandes teodolitos reiteradores, construídos uno por Mr. Brunner, de París, y el otro por Mr. Repsold, de Hamburgo, perteneciendo ambos instrumentos á la colección que posee la Junta de Estadística. El círculo vertical del primero tiene 0^{m},32 de diámetro, sus divisiones son de 5′, y se aprecian directamente 2″ por medio de dos microscopios mi-

crométricos diametralmente opuestos, en los cuales el paso de rosca del tornillo tiene un valor angular muy próximo á 2′. Una parte ó división del nivel unido á los microscopios, representa un valor de 1″,80. El anteojo, de 0^m,64 de distancia focal y 0^m,052 de abertura, es recodado en ángulo recto con un prisma interior, que refleja hacia el ocular los rayos que recibe por el objetivo, proporcionando una amplificación lineal de 35 veces, y conteniendo un retículo compuesto de seis hilos verticales y dos horizontales.

El teodolito de Repsold, de construcción análoga al de Brunner, difiere tan sólo de él en las dimensiones: el diámetro del círculo vertical es de 0^m,285, se halla dividido de 4′ en 4′, y por medio de dos microscopios micrométricos, de un paso de rosca próximamente igual al de los de Brunner, se aprecian directamente 2″; el valor angular de una parte del nivel es 1″,76, y la amplificación del anteojo 44 veces, con una distancia focal de 0^m,525 y una abertura de 0^m,04.

Aunque la forma de los anteojos de ambos teodolitos y el espesor de metales de sus tubos son muy adecuados para hacer inapreciables los efectos de la flexión, se ejecutó, sin embargo, un trabajo especial para asegurarse de que las distancias cenitales observadas no debían sufrir ninguna corrección por la indicada causa, lo cual quedó confirmado por la experiencia, pues el resultado obtenido fué inferior á los errores de la determinación.

La simultaneidad de las observaciones fué completa en esta nivelación. Un sistema de señales hechas en cada punto, con estandartes colocados á uno ú otro lado de la barraca en

que se hallaba el instrumento, permitía á los observadores corresponder entre sí con la mayor claridad y sencillez, sin que ocurriese jamás la menor duda.

Se completó el número de sesenta distancias cenitales simples en cada estación para los dos lados de menor longitud, y el doble para el lado mayor; reiterando convenientemente las mediciones angulares en distintos arcos del círculo vertical, para poder prescindir de los pequeños errores que pudiesen presentar las divisiones de los instrumentos.

Para dar idea de la exactitud de este trabajo, próximo á publicarse con toda extensión, presento en el siguiente *Estado* datos análogos á los que he reunido de las otras nivelaciones ejecutadas por el mismo método. Los tres puntos en que se ha observado se designan por A, B, C, siendo el lado $A\ C$ la base de Madridejos, y B la estación elegida para punto intermedio. Esta operación da evidentemente lugar á dos errores probables Δ_1 y Δ_2, según se calcule por los lados AB y BC, ó directamente por el AC.

NIVELACIÓN DE LA BASE DE MADRIDEJOS.

B — A		B — C		C — A			
$(\frac{1}{2} z'' - z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$(\frac{1}{2} z'' - z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$(\frac{1}{2} z'' - z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$(\frac{1}{2} z'' - z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
0 42 4,41	+ 0,30	0 40 29,06	— 3,04	0 0 33,13	+ 0,62	0 0 32,43	+ 1,32
4,76	— 0,05	27,32	— 1,30	34,30	— 0,55	29,07	+ 4,68
3,53	+ 1,18	27,80	— 1,78	35,30	— 1,55	33,84	— 0,09
3,86	+ 0,85	26,70	— 0,68	33,22	+ 0,53	32,29	+ 1,46
4,27	+ 0,44	28,17	— 2,15	33,55	+ 0,20	32,63	+ 1,12
3,90	+ 0,81	28,98	— 2,96	32,13	+ 1,62	32,97	+ 0,78
3,95	+ 0,76	27,86	— 1,84	34,58	— 0,83	29,91	+ 3,84
3,54	+ 1,17	27,24	— 1,22	35,04	— 1,29	29,85	+ 3,90
4,41	+ 0,30	25,99	+ 0,03	34,07	— 0,32	33,84	— 0,09
3,91	+ 0,80	27,63	— 1,61	35,57	— 1,82	32,70	+ 1,05
3,77	+ 0,94	26,47	— 0,45	31,40	+ 2,35	33,26	+ 0,49
4,15	+ 0,56	27,69	— 1,67	29,08	+ 4,67	35,47	— 1,72
3,67	+ 1,04	26,13	— 0,11	29,55	+ 4,20	34,51	— 0,76
4,13	+ 0,58	25,59	— 0,57	30,36	+ 3,39	35,81	— 2,06
5,71	— 1,00	26,76	— 0,74	33,49	+ 0,26	33,75	0,00
4,44	+ 0,27	27,55	— 1,53	34,39	— 0,64	32,23	+ 1,52
5,32	— 0,61	28,14	— 2,12	34,12	— 0,37	31,11	+ 2,64
4,48	+ 0,23	27,08	— 1,06	33,75	0,00	30,43	+ 3,32
5,41	— 0,70	26,74	— 0,72	33,73	+ 0,02	32,04	+ 1,71
5,25	— 0,54	26,39	— 0,37	35,37	— 1,62	32,44	+ 1,31
4,94	— 0,24	26,27	— 0,25	34,63	— 0,88	34,23	— 0,48
5,75	— 1,04	25,52	+ 0,50	35,22	— 1,47	35,14	— 1,39
5,74	— 1,03	26,35	— 0,33	33,96	— 0,21	35,39	— 1,64
4,72	— 0,01	25,55	+ 0.47	32,64	+ 1,11	35,49	— 1,74
5,76	— 1,05	25,95	+ 0,07	36,01	— 2,26	34,36	— 0,61
5,87	— 1,16	27,33	— 1,31	35,22	— 1,47	35,63	— 1,88
3,29	+ 1,42	26,84	— 0,82	35,46	— 1,71	34,34	— 0,59
4,88	— 0,17	26,41	— 0,39	35,32	— 1,57	34,74	— 0,99
4,12	+ 0,59	26,26	— 0,24	35,32	— 1,57	34,83	— 1,08
4,26	+ 0,45	26,96	— 0,94	35,10	— 1,35	34,75	— 1,00
4,36	+ 0,35	25,04	+ 0,98	37,10	— 3,35	34,91	— 1,16
4,02	+ 0,69	26,49	— 0,47	37,02	— 3,27	35,02	— 1,27
3,69	+ 1,02	26,54	— 0,52	35,00	— 1,25	35,10	— 1,35
4,83	— 0,12	26,62	— 0,60	35,32	— 1,57	35,71	— 1,96
4,95	— 0,24	26,64	— 0,62	36,61	— 2,86	34,54	— 0,79
5,62	— 0,91	25,62	+ 0,40	35,86	— 2,11	35,21	— 1,46
4,81	— 0,10	24,55	+ 1,47	32,73	+ 1,02	35,28	— 1,53
4,66	+ 0,05	23,65	+ 2,37	31,85	+ 1,90	32,36	+ 1,39
4,71	0,00	23,42	+ 2,60	33,00	+ 0,75	31,64	+ 2,11
4,52	+ 0,19	23,16	+ 2,86	33,06	+ 0,69	33,26	+ 0,49
4,18	+ 0,53	24.72	+ 1,30	32,46	+ 1,29	32,96	+ 0,79
4,78	— 0,07	24,72	+ 1,30	32,80	+ 0,95	33,89	— 0,14
5,59	— 0,88	24,93	+ 1,09	34,69	— 0,94	34,00	— 0,25
5,75	— 1,04	24,26	+ 1,76	34,34	— 0,59	36,46	— 2,71
7,06	— 2,35	24,18	+ 1,84	34,35	— 0,60	36,45	— 2,70
3,79	+ 0,92	24,36	+ 1,66	35,20	- 1,45	33,95	— 0,20
3,78	+ 0,93	23,31	+ 2,71	33,35	+ 0,40	34,90	— 1,15
4,80	— 0,09	24,48	+ 1,54	31,73	+ 2,02	35,05	— 1,30
3,99	+ 0,72	24,75	+ 1,27	32,39	+ 1,36	35,76	— 2,01
4,86	— 0,15	23,40	+ 2,62	29,69	+ 4,06	34,26	— 0,51
4,93	— 0,22	24,83	+ 1,19	31,53	+ 2,22	34,75	— 1,00
5,02	— 0,31	23,85	+ 2,17	33,34	+ 0,41	32,92	+ 0,83
5,14	— 0,43	25,79	+ 0,23	31,96	+ 1,79	33,73	+ 0,02
4,87	— 0,16	25,69	+ 0,33	34,09	— 0,34	34,14	— 0,39
3,63	+ 1,08	25,73	+ 0,29	33,00	+ 0,75	34,02	— 0,27
5,82	— 1,11	25,06	+ 0,96	34,07	— 0,32	32,82	+ 0,93
5,49	— 0,78	27,58	— 1,56	35,76	— 2,01	32,74	+ 1,01
4,59	+ 0,12	26,01	+ 0,01	34,24	— 0,49	32,75	+ 1,00
5,36	— 0,65	26,38	— 0,36	31,77	+ 1,98	33,56	+ 0,19
6,92	— 2,21	25,86	+ 0,16	31,79	+ 1,96	33,87	— 0,12
0 42 4,71	0,65	0 40 26,02	1,14			0 0 33,75	1,35
$e_1 = 0'',549 \ldots 0^m,020$		$e_2 = 0'',958 \ldots 0^m,035$				$e = 1'',143$	

$\Delta_1 = \pm\ 0^m,040$ $\Delta_2 = \pm\ 0^m,081$

El valor de Δ_1, correspondiente á un lado de 14 ½ kilómetros, es doble del de Δ_1 relativo á puntos separados por una distancia poco mayor de la mitad, á pesar de haber duplicado el número de observaciones para aquella determinación; pero debe tenerse presente que entre los dos extremos de la base, las trayectorias luminosas pasan muy próximas al terreno, y están expuestas, por consiguiente, á las irregularidades debidas á los cambios de temperatura del aire en sus capas inferiores.

Cuando el número de lados en que se opera es mayor que el de los absolutamente indispensables, resultan, como en este caso, condiciones superabundantes, que dan lugar á otras tantas ecuaciones, cuya resolución proporciona las correcciones que deben sufrir los primeros desniveles obtenidos. Entre las cotas de uno de los extremos de la base, deducidas directamente del otro extremo, ó pasando por el tercer punto, hubo tan sólo una diferencia de $0^m,035$, que se repartió por medio de la compensación.

II.

Deseando la Academia de Ciencias de San Petersburgo disipar las dudas que existían acerca de si las aguas del mar Caspio forman con las del Océano y demás mares que con éste comunican una misma superficie esferoidal, resolvió llevar á cabo una nivelación geodésica entre Kagalnik, á orillas del mar de Azof, y Tschernoi-Rynok, aldea situada en la costa del mar Caspio.

En las instrucciones dadas á los astrónomos Sres. Fuss, Sawitsch y Sabler, encargados de este trabajo, se les recomendaba que siguiesen el método de estacionar entre cada dos de los puntos elegidos, determinando por las distancias cenitales aparentes de éstos su diferencia de nivel.

Aunque este procedimiento no exige más que un instrumento y un observador, la Comisión llevaba consigo, además del material de observación necesario para otros trabajos que debía ejecutar, tres instrumentos destinados á la medición de distancias cenitales para la nivelación, operando los astrónomos independientemente uno de otro, y siendo tal el sistema de observaciones, que al terminar la operación se obtuvieron cinco determinaciones de la diferencia de nivel entre los dos mares.

Siendo V^n, V^{n+1} y V^{n+2} *(Figura 1)* tres vértices de la línea poligonal de nivelación, y careciendo de datos geodésicos para deducir sus respectivas distancias, decidieron medir pequeñas bases $A^n B^n$, $A^{n+1} B^{n+1}$, que se enlazaban con los puntos dados por medio de los triángulos $A^n B^n V^n$, $A^n B^n V^{n+1}$, etc., cuya resolución daba la longitud de los lados del rombo $A^n V^n B^n V^{n+1}$ y la de la diagonal. Para evitar la acumulación de errores en las direcciones de los lados, se determinó, por observaciones de la polar, el azimut absoluto de la señal inmediata, no sólo en todos los vértices V^n, V^{n+1}, V^{n+2}..., sino en algunos puntos intermedios. También se determinaron varias latitudes.

Las observaciones para la nivelación se hacían en el orden siguiente: en los extremos B^n y B^{n+1} de dos bases inmediatas,

observaban dos astrónomos las distancias cenitales de los vértices V^n, V^{n+1} y V^{n+1}, V^{n+2}, en tanto que el tercer observador, situado en V^{n+1}, medía las distancias cenitales de V^n, B^n, B^{n+1} y V^{n+2}. El que había observado en B^{n+1} pasaba el día siguiente á B^{n+2}; el de V^{n+1} á V^{n+2}, y el de B^n á B^{n+1}. Arreglando diariamente los relojes de bolsillo al tiempo verdadero del sitio de la observación, y distando cincuenta minutos entre sí los centros de las diferentes series de distancias cenitales, resultaban éstos simultáneos á poco más de un minuto. La simultaneidad de las horas promedios de las series tenía lugar además para cada uno de los objetos, pues se observaban éstos siempre en el mismo orden, de manera que en V^{n+1}, por ejemplo, se apuntaba con el círculo vertical á la izquierda á V^n, B^n, B^{n+1}, V^{n+2}, y con el círculo á la derecha en el orden inverso. En cada serie se cambiaba la posición del círculo vertical, para operar sobre diferentes partes de la división.

Indicado ya en general el sistema de observaciones adoptado, daré algunas noticias de este trabajo, publicado por el célebre Struve, bajo los auspicios de la Academia de San Petersburgo (*). La línea poligonal de nivelación constaba de 123 lados, cuya suma era de unos 800 kilómetros. La distancia entre cada dos vértices consecutivos era casi la misma en toda la línea; y el promedio de todas estas distancias no llegaba á $7\,150^m$. El número de bases, medidas con un sencillo

(*) *Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und Caspischen Meere 1836 und 1837 von G. Fuss, A. Sawitsch und G. Sabler.* Herausgegeben von Struve. — S.t Petersburg, 1849.

aparato, fué de 123; y el promedio de las longitudes de todas ellas, de 377^m. El término medio de las diferencias de nivel entre cada dos vértices no llegaba á 24^m, siendo la mayor de 215^m. Á tan cortas distancias se hacía la puntería con mucha exactitud sobre miras planas pintadas de blanco y de negro.

Los tres teodolitos procedían de los talleres de Ertel, en Munich. El de mayores dimensiones tenía un círculo vertical de $0^m,24$ de diámetro con cuatro nonios que apreciaban $4''$; y una parte ó división del nivel correspondiente valía $2'',54$. Con una distancia focal de $0^m,44$ y un objetivo de $0^m,042$ de abertura, amplificaba el anteojo 40 y 60 veces, según el ocular de que se hacía uso. Los otros dos instrumentos, exactamente iguales entre sí, eran algún tanto menores: en el círculo vertical, con un diámetro de $0^m,19$, se apreciaban $10''$ por medio de cuatro nonios; las partes de los niveles tenían valores angulares de $2'',40$ y $3'',23$; los anteojos aumentaban 28 veces con una distancia focal de $0^m,32$ y una abertura de $0^m,026$.

Como he indicado ya, de las diversas operaciones se dedujeron cinco resultados, completamente independientes:

1.° El que proviene de la observación de las miras V^n y V^{n+1} hecha por uno de los astrónomos en los 123 extremos B^n de las bases;

2.° El resultado de las mismas distancias cenitales, medidas por el segundo observador un día después;

3.° El calculado por la observación de las miras situadas en los puntos B^n, B^{n+1}, y hecha por el tercer astrónomo en los 123 vértices V^n;

4.° El deducido de la observación de las miras V^{n-1}

y V^{n+1} hecha por el mismo tercer observador en las 61 estaciones V^n, siendo n número par;

5.° El que el mismo observador proporcionó con la medición de las distancias cenitales de V^n y V^{n+2} hechas en los vértices impares V^{n+1}.

Estas cinco nivelaciones se calcularon, primero separadamente para ver las discordancias que presentaban sus resultados y formar idea de la bondad del trabajo, pero después se combinaron todas las operaciones que determinaban cada diferencia de nivel parcial, teniendo en cuenta sus pesos relativos.

Las cinco nivelaciones parciales dieron para la diferencia de altura entre el mar de Azof y el Caspio, los valores siguientes:

	m
1.ª	26,74
2.ª	26,72
3.ª	25,65
4.ª	24,48
5.ª	26,69.

Por el cálculo definitivo se dedujeron, haciendo entrar todos los datos de observación, las altitudes de las 124 miras. Combinando estos resultados y los demás elementos publicados por Struve, he formado el siguiente *Estado*, en el que aparecen las 123 diferencias de nivel d con sus respectivos errores probables e, reducido todo á medidas métricas.

NIVELACIÓN ENTRE EL MAR CASPIO Y EL DE AZOF.

N.º	d	e	N.º	d	e	N.º	d	e
	m	m		m	m		m	m
1	+ 29,710	0,013	42	+ 90,508	0,010	83	— 7,628	0,016
2	+ 13,277	0,022	43	+ 31,394	0,023	84	— 9,698	0,012
3	— 14,752	0,026	44	+ 16,662	0,011	85	— 6,685	0,026
4	+ 10,665	0,017	45	+ 84,734	0,014	86	— 8,473	0,021
5	— 20,952	0,007	46	+ 68,047	0,011	87	— 13,335	0,014
6	+ 20,739	0,028	47	+ 20,787	0,015	88	+ 5,822	0,015
7	— 19,096	0,017	48	— 99,921	0,015	89	— 14,478	0,019
8	+ 6,086	0,029	49	— 155,316	0,015	90	+ 3,421	0,023
9	+ 52,667	0,028	50	+ 17,628	0,027	91	+ 1,046	0,013
10	— 48,224	0,013	51	+ 9,507	0,027	92	— 10,729	0,015
11	+ 32,898	0,027	52	+ 90,155	0,015	93	— 7,130	0,010
12	+ 16,353	0,039	53	+ 38,344	0,030	94	— 9,446	0,015
13	— 1,146	0,035	54	— 159,159	0,023	95	— 9,634	0,018
14	+ 0,074	0,016	55	+ 9,599	0,032	96	+ 1,603	0,016
15	+ 21,163	0,034	56	— 20,109	0,022	97	+ 4,288	0,027
16	— 4,326	0,022	57	+ 46,660	0,014	98	— 1,057	0,023
17	+ 3,348	0,015	58	+ 214,841	0,020	99	— 10,688	0,026
18	+ 3,597	0,018	59	— 7,003	0,023	100	— 0,874	0,028
19	+ 0,737	0,015	60	— 32,474	0,024	101	— 1,880	0,018
20	+ 9,939	0,018	61	— 178,900	0,016	102	— 15,654	0,021
21	— 7,689	0,016	62	+ 73,355	0,035	103	— 2,474	0,018
22	— 12,443	0,018	63	— 3,033	0,016	104	— 12,217	0,012
23	— 23,749	0,021	64	— 109,802	0,008	105	— 2,644	0,014
24	+ 13,109	0,018	65	— 3,368	0,035	106	— 13,647	0,023
25	+ 10,853	0,023	66	+ 18,839	0,020	107	— 13,901	0,025
26	+ 28,781	0,021	67	+ 36,594	0,018	108	+ 0,036	0,023
27	— 37,445	0,018	68	+ 3,372	0,020	109	— 14,884	0,013
28	— 13,835	0,024	69	+ 36,683	0,045	110	— 7,409	0,012
29	— 9,009	0,010	70	— 131,803	0,046	111	— 4,958	0,021
30	— 6,159	0,011	71	+ 28,197	0,031	112	— 4,026	0,010
31	— 0,579	0,020	72	+ 23,449	0,015	113	— 2,304	0,015
32	+ 1,722	0,022	73	+ 26,609	0,013	114	+ 0,312	0,020
33	+ 2,751	0,023	74	— 11,984	0,013	115	— 1,933	0,004
34	+ 9,200	0,017	75	+ 2,779	0,023	116	— 4,978	0,023
35	+ 64,127	0,016	76	— 46,159	0,023	117	+ 2,027	0,021
36	— 11,052	0,017	77	— 10,104	0,012	118	— 0,765	0,016
37	+ 19,449	0,012	78	— 16,261	0,018	119	— 3,056	0,020
38	+ 33,645	0,023	79	— 23,157	0,039	120	+ 3,249	0,025
39	— 1,354	0,015	80	— 16,954	0,022	121	— 0,025	0,020
40	— 2,240	0,013	81	— 22,161	0,009	122	— 0,020	0,020
41	+ 78,847	0,037	82	— 10,772	0,022	123	— 7,760	0,013

La suma de los 123 desniveles, contenidos en el *Estado* anterior, da el que existía entre la primera y última mira; á él se agregó la diferencia $-3^m,449$ entre las alturas de las miras extremas sobre las aguas medias de los respectivos mares, obteniendo así su diferencia de nivel. El resultado definitivo fué que, en octubre de 1837, el nivel medio de las aguas del mar Caspio se hallaba $26^m,045$ más bajo que el de las del mar de Azof y demás que con éste comunican.

En el cálculo del error probable de toda la operación han de entrar no sólo los de las 123 diferencias de nivel, sino los relativos á las determinaciones de la altura media de las aguas en el mar de Azof y en el Caspio, así como el que proviene de la incertidumbre en la medición de las distancias entre los diferentes puntos nivelados. Este último resultó de $0^m,062$ y los dos primeros, respectivamente, de $0^m,051$ y $0^m,038$; por consiguiente, el error probable de la nivelación será [*Fórmula* (3)]:

$$\Delta = \pm\ 0^m,252.$$

Llegar de un extremo á otro de una línea de nivelación de 800 kilómetros, con un error probable menor de tres decímetros, es obtener un resultado sorprendente, que difícilmente se superará en otras operaciones, sea cual fuere el sistema que se emplee.

III.

En una Memoria publicada por la Oficina de longitudes de Francia, entre las adiciones al conocimiento de los movimientos celestes para 1 842 (*), presenta Mr. Biot las fórmulas necesarias para determinar la refracción terrestre, siempre que las capas atmosféricas de igual poder refringente no se aparten mucho de la forma esférica, y que el decremento de las densidades de las mismas capas sea una función de su altura, siendo cualquiera la ley de este decremento, con tal que se haya definido por medio de la observación. Después de establecer rigurosamente las fórmulas finales, deduce una aproximación para la práctica de las nivelaciones geodésicas, en la hipótesis de que el decremento de las densidades en las capas atmosféricas sea proporcional á la primera potencia de una variable, función de los radios vectores de la trayectoria luminosa. Este es el caso que voy ahora á considerar.

Si A *(Figura 2)* es una estación, desde la cual se ha observado una señal B, que la refracción hace ver en dirección de la tangente AE á la trayectoria luminosa BA,
designando:

z'... la distancia cenital aparente HAE de la señal B,

(*) En razón á ser difícil adquirir este libro en la actualidad, me ha parecido conveniente exponer los fundamentos de las principales fórmulas que he de usar en el curso de esta Memoria, limitándome á las indispensables para las aplicaciones prácticas, y modificándolas algunas veces con el objeto de simplificar el cálculo.

contada siempre hacia el lado en que su valor es menor de 90°,

R', R''... los radios vectores CA, CB,

v... el ángulo que forman, tomándolo como positivo á partir del CA hacia el lado en que crezca el radio vector R'',

δ', δ''... las densidades del aire que se determinan en los puntos A y B al mismo tiempo que se observa la distancia cenital z',

k... el poder refringente del aire atmosférico, siendo igual á 1 su densidad á la temperatura del hielo fundente, bajo una presión, á 0°, de $0^{m},76$ con la gravedad G,

1... la velocidad de la luz en el vacío,

la ecuación diferencial de la trayectoria luminosa establecida por Laplace en su *Mecánica celeste*, es:

$$(1) \qquad dv = \frac{R' \operatorname{sen} z' \sqrt{1 + 4k\delta'}\, dR''}{R'' \sqrt{R''^2 (1 + 4k\delta'') - R'^2 (1 + 4k\delta') \operatorname{sen}^2 z'}}.$$

En las nivelaciones geodésicas resulta siempre muy pequeña la diferencia de altura entre dos estaciones inmediatas con respecto á la longitud de los radios vectores de la trayectoria, y, por consiguiente, la relación entre éstos variará tan sólo en una pequeña fracción. Haciendo, pues:

$$(2) \qquad \frac{R'}{R''} = 1 - s',$$

y para simplificar:

$$(3) \qquad \frac{2k\delta'}{1 + 4k\delta'} = \alpha',$$

la ecuación (1) se convertirá en:

$$(4) \qquad dv = \frac{\text{sen.}\, z'\, ds'}{\sqrt{\cos.^2 z' - 2\alpha' \frac{\delta' - \delta''}{\delta'} + (2\, s' - s'^2)\, \text{sen.}^2 z'}}.$$

Considerando un punto de la trayectoria luminosa cuyo desnivel, respecto de A, sea bastante pequeño para que la variación de las densidades en esta capa de la atmósfera pueda representarse con suficiente aproximación por la fórmula

$$(5) \qquad \delta'' = \delta'(1 - i's' - i'_1 s'^2),$$

en la cual i', i'_1 son coeficientes numéricos, cuyos valores se determinan por experiencia en cada caso, é introduciendo esta expresión en la ecuación (4), será:

$$(6) \quad dv = \frac{\text{sen.}\, z'.\, ds'}{\sqrt{\cos.^2 z' - 2(i'\alpha' - \text{sen.}^2 z')\, s' - (2\, i'_1 \alpha' + \text{sen.}^2 z')\, s'^2}}.$$

Al integrar esta expresión, conviene distinguir el caso en que el coeficiente de la segunda potencia de la variable s' es positivo, de aquel en que es negativo; expresando el radio vector de la trayectoria de diferente manera en cada uno, y reuniendo después en un mismo desarrollo las dos fórmulas obtenidas.

Suponiendo que el indicado coeficiente sea una cantidad positiva, y haciendo:

$$(7) \qquad 2i'_1 \alpha' + \text{sen.}^2 z' = N^2,$$

$$(8) \qquad \frac{Nv}{\text{sen.}\, z'} = v_1,$$

N será una constante real, y v_1 una variable auxiliar, igualmente real.

Designando:

V'... una constante arbitraria, cuya significación geométrica se fijará después,

y haciendo por analogía con la (8)

$$(9) \qquad \frac{NV'}{\text{sen.}\, z'} = V_1,$$

la integral de la ecuación diferencial, será:

$$(10) \qquad \text{tang.}\,(V_1 - v_1) = \frac{N\sqrt{\cos.^2 z' - 2\,(i'\,\alpha' - \text{sen.}^2 z')\,s' - N^2 s'^2}}{i'\,\alpha' - \text{sen.}^2 z' + N^2 s'}$$

La constante V' comienza á definirse por la condición de que los ángulos en el centro v se cuenten á partir de la vertical de la estación A, en que la distancia cenital es z', y en donde se halla el origen de la variable s'. Cuando s' sea nula, el ángulo v lo será igualmente, y la ecuación (10) se convertirá en:

$$(11) \qquad \text{tang.}\, V_1 = \frac{N \cos.\, z'}{i'\,\alpha' - \text{sen.}^2 z'};$$

y en virtud de la (9)

$$(12) \qquad \text{tang.}\left(\frac{N V'}{\text{sen.}\, s'}\right) = \frac{N \cos.\, s'}{s'\, \alpha' - \text{sen.}^2 s'}.$$

Esta condición exige que el valor de V' sea de la forma:

$$(13) \qquad V' + m \frac{\text{sen.}\, s'}{N}\, 180^\circ,$$

siendo V' un ángulo que satisfaga á la (12) y m un número entero positivo ó negativo.

Todos los ángulos comprendidos en esta expresión general (13) gozan de la propiedad de que, tomando sus valores por v, hacen nulo el primer miembro de la ecuación (10), y corresponden, por consiguiente, á valores de variable s' que hacen nulo el radical del segundo miembro. En efecto, si se supone:

$$v = V' + m \frac{\text{sen.}\, s'}{N}\, 180^\circ,$$

resultará, en virtud de las (8) y (9),

$$\text{tang.}\,(V_1 - v_1) = o.$$

La ecuación diferencial (6) de la trayectoria da, para el caso en que el indicado radical sea nulo,

$$d s' = o;$$

pero diferenciando la (2), se obtiene:

$$(14) \qquad d s' = \frac{R'}{R'^2}\, d R'.$$

El primer miembro de esta ecuación será igual á cero, siempre que:

$$d R' = o.$$

La forma general de la constante V' expresa, pues, los valores del ángulo en el centro, para los cuales el incremento diferencial del radio vector es nulo. Cuando esto se verifica, el elemento de la trayectoria es perpendicular al radio vector, y, por consiguiente, horizontal.

Si se supone nulo el poder refringente del aire, ó que no existe refracción, la trayectoria se convierte en una recta $B D$, y se confunde en todos sus puntos con la tangente, verificándose la horizontalidad en el punto D, en que la encuentra la perpendicular que parte desde el centro C. El triángulo $A D C$ da para V', en el supuesto admitido:

$$V' = -(90^\circ - z'). \tag{15}$$

El ángulo V' se considera como negativo, con arreglo al convenio establecido, porque siendo menor de 90° la distancia cenital verdadera, la perpendicular $C D$ cae á la parte opuesta de aquella hacia donde crece el radio vector. Cuando la distancia cenital verdadera sea mayor que el ángulo recto *(Figura 3)*, V' será positivo.

Para obtener el valor de la variable s', puede expresarse el cos. $(V_1 - v_1)$ en función de su tangente (10), lo cual dará:

$$\cos.^2 (V_1 - v_1) = \frac{(N^2 s' + i' \alpha' - \text{sen.}^2 z')^2}{N^2 \cos.^2 z' + (i' \alpha' - \text{sen.}^2 z')}. \tag{16}$$

Introduciendo una cantidad auxiliar C'^2 tal, que sea:

$$(17) \qquad N^4 C'^2 = N^2 \cos.^2 z' + (i' \alpha' - \text{sen.}^2 z')^2;$$

y sustituyendo en la (16), se obtiene:

$$(18) \qquad \left(s' + \frac{i' \alpha' - \text{sen.}^2 z'}{N^2}\right)^2 = C'^2 \cos.^2 (V_1 - v_1).$$

De las dos raíces de esta ecuación debe tomarse tan sólo la que anula s', al mismo tiempo que v; pero como el signo de C' se halla todavía indeterminado, puede tomarse cualquiera de las dos formas bajo las cuales se presentan las raíces, con tal que se dé á C' el signo necesario para que quede satisfecha la condición impuesta. Tomando:

$$(19) \qquad s' = -\frac{i' \alpha' - \text{sen.}^2 z'}{N^2} + C' \cos. (V_1 - v_1),$$

y haciendo nulo el ángulo v, lo que anula también v_1 (8), deberá ser para que $s' = o$,

$$(20) \qquad C' = \frac{i' \alpha' - \text{sen.}^2 z'}{N^2 \cos. V_1}.$$

Combinando las dos expresiones (18) y (19), resulta por fin el valor:

$$(21) \quad s' = C' \cos. (V_1 - v_1) - C' \cos. V_1 = 2\, C' \text{sen.} \tfrac{1}{2} v_1 \text{sen.} (V_1 - \tfrac{1}{2} v_1),$$

del cual se deduce la diferencia de nivel por la ecuación (2), que puede ponerse bajo la forma:

$$(22) \qquad R'' - R' = \frac{s' R'}{1 - s'}.$$

Para R' se toma el valor del radio de la Tierra á la latitud correspondiente.

Hasta aquí se ha supuesto positivo el coeficiente de la segunda potencia de s' en la ecuación diferencial (6). Esto es lo que se verifica en todos los casos cuando se emplea el método de observación y la hipótesis que voy á manifestar, y, por consiguiente, las fórmulas que anteceden son suficientes para el objeto.

En efecto: calculándose las densidades del aire sólo en los extremos de la trayectoria, y suponiendo que el decremento de la densidad es proporcional á la primera potencia de la variable s', el coeficiente i'_1 será cero en la ecuación (5), la cual se convertirá en:

$$\delta'' = \delta' (1 - i' s'); \tag{23}$$

la (7) se reducirá á

$$N^2 = \text{sen.}^2 z', \tag{24}$$

cantidad siempre positiva.

Con este valor de N las (8), (9), darán $v_1 = v$, $V_1 = V'$, y las (11), (20), (21), serán en el caso actual:

$$\text{tang. } V' = \frac{\text{sen. } z' \cos. z'}{i' \alpha' - \text{sen.}^2 z'} \tag{25}$$

$$C' = \frac{i' \alpha' - \text{sen.}^2 z'}{\text{sen.}^2 z' \cos. V'} \tag{26}$$

$$s' = 2\, C' \text{ sen. } \tfrac{1}{2} v \text{ sen. } (V' - \tfrac{1}{2} v). \tag{27}$$

Si no existiese la refracción, el valor del ángulo V' sería el (15), y, por consiguiente, su verdadero valor diferirá de éste en cantidades del orden de la refracción. Introduciendo, pues, una incógnita auxiliar y' tal que

$$V' = -(90^\circ - z' + y'), \tag{28}$$

lo que da

$$\begin{aligned} \text{sen. } V' &= -\cos.(z' - y') \\ \cos. V' &= \text{sen.}(z' - y') \end{aligned},$$

y sustituyendo estos valores en la (25), resulta para y':

$$\text{tang. } y' = \frac{i'\,\alpha'}{(1 - i'\,\alpha')\,\text{tang. } z'}. \tag{29}$$

Con el auxilio de esta fórmula se calculará fácilmente el ángulo V' cuando i' y α' sean conocidos.

Despejando i' en la ecuación (23), resultará su valor en función de s', lo cual exige que se proceda por aproximaciones sucesivas. Como primera aproximación, al comenzar el cálculo de una serie, puede tomarse para s' el valor proporcionado por la (2) correspondiente á la diferencia del nivel determinada bajo el supuesto de ser nula la refracción; deduciendo así un segundo valor de s' y debiendo calcularse de nuevo con las mismas observaciones otra diferencia de nivel, introduciendo como aproximado este último valor.

Designando:

s... el valor más aproximado que se tenga de la variable s',

la ecuación (23) da:

$$i' = \left(1 - \frac{\delta''}{\delta'}\right) \frac{1}{s}. \tag{30}$$

Resta únicamente calcular δ' y δ'', puesto que α' (3) depende tambien de δ' y de la constante k.

El valor de ésta, según las experiencias de Biot y Arago, cuyas observaciones fueron calculadas nuevamente por M. Caillet, con el coeficiente de dilatación del aire determinado por MM. Magnus y Regnault, es:

$$k = 0{,}000146957, \tag{31}$$

sin que sea necesario tener en cuenta la humedad del aire, porque éste refracta la luz sensiblemente de la misma manera cuando se halla seco que cuando contiene una cierta cantidad de vapor acuoso.

Si se representa por:

g... la gravedad en el sitio de la observación,

t'... la temperatura observada,

p'... la presión reducida á 0°,

γ... la densidad del mercurio á la misma temperatura,

ε... el coeficiente, 0,00366, de dilatación del aire por un grado centesimal de temperatura,

la relación

$$\frac{g\,\gamma\,p'}{G\,\gamma\,0^{m},76}$$

entre los pesos de las columnas de mercurio en el sitio de la observación y en París, donde se hicieron las experiencias para determinar k, será igualmente la relación de las presiones que actúan sobre el aire; por consiguiente, habiendo supuesto igual á la unidad la densidad de éste para el valor de k, se tendrá para δ':

$$\delta' = \frac{g}{G} \cdot \frac{p'}{0^m,76\,(1 + \varepsilon\, t')}.$$

En rigor, debería determinarse la relación $\frac{g}{G}$ teniendo en cuenta la latitud geográfica, altura sobre el nivel del mar y atracciones locales en los dos puntos en que se suponen ser G y g los valores de la gravedad; pero siendo muy próxima á la unidad esta relación, puesto que en el Polo es 0,9989, mientras que en el Ecuador no pasa de 1,0015, podrá prescindirse de ella en la práctica.

Designando:

t''... la temperatura del aire observada junto á la señal,

p''... la presión reducida á 0^c,

las expresiones de las densidades del aire en la estación y junto á la señal serán:

$$\delta' = \frac{p'}{0^m,76\,(1 + \varepsilon\, t')} \tag{32}$$

$$\delta'' = \frac{p''}{0^m,76\,(1 + \varepsilon\, t'')}. \tag{33}$$

Las fórmulas (22), (26), (27), (28), (29), (30), (32), (33) y la constante (31), aplicadas en el orden conveniente, proporcionan el valor de la diferencia de nivel calculada por medio

de una distancia cenital y de las presiones y temperaturas del aire, observadas simultáneamente en la estación y junto á la señal, partiendo del valor más aproximado s que se tenga de la variable s'.

Para determinarlo al empezar el cálculo, considérese el triángulo ABC *(Figura 2)*, en el cual se verifica:

$$R' \text{ sen. } m = R'' \text{ sen. } n; \tag{34}$$

designando:

R''_a... un valor aproximado de R'',

z''_0... la distancia cenital LBF del punto A que se hubiera observado desde B,

θ', θ''... las refracciones EAB, FBA en los puntos A y B, haciendo, para simplificar,

$$\frac{R''_a - R'}{R''_a + R'} = x, \tag{35}$$

é introduciendo el ángulo en el centro v, ligado á las distancias cenitales por la condición:

$$z' + z''_0 + \theta' + \theta'' = 180^\circ + v, \tag{36}$$

la ecuación (34) dará:

$$x = \text{tang. } \tfrac{1}{2} v \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (z''_0 - z' + \theta'' - \theta'); \tag{37}$$

eliminando z''_0 y θ'' entre las (36) y (37), y suponiendo θ' igual á cero, para esta primera aproximación,
resulta:

$$x = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,v}{\text{tang.}\,(z' - \frac{1}{2}\,v)}\,; \tag{38}$$

y la (35) da para la diferencia de nivel aproximada:

$$R''_a - R' = \frac{2\,R'\,x}{1 - x}, \tag{39}$$

con la cual se calcula inmediatamente el valor de s por la (2) puesta bajo la forma:

$$s = \frac{R''_a - R'}{R''_a}. \tag{40}$$

Para el cálculo de las demás observaciones se parte ya de un valor más aproximado de s' que se haya deducido de la marcha misma de la operación.

El origen de las variables s' se ha supuesto en la estación inferior, desde la cual va creciendo el radio vector R'', y por consiguiente, las fórmulas que anteceden son aplicables únicamente al caso en que la distancia cenital se haya observado en la estación más baja de las dos que se consideran. Cuando se calcula la diferencia de nivel por la distancia cenital observada en la estación superior y las densidades del aire en los

dos extremos de la trayectoria luminosa, las fórmulas que se emplean son análogas á las que acaban de establecerse, con la diferencia de que el coeficiente de la nueva variable en la (23), se expresa en función de i', verificando la transformación de origen de la estación inferior á la superior. Contándose en este caso todas las cantidades en sentido inverso del supuesto general, el valor de la variable será negativo, así como el del ángulo en el centro v.

Suponiendo que en un tercer punto de la trayectoria sea:

R... el radio vector,

δ... la densidad del aire,

σ... la variable que tiene su origen en el mismo punto, se verificará:

$$\frac{R}{R''} = 1 - \sigma \qquad \frac{R'}{R''} = 1 - s',$$

y por consiguiente,

$$s' = \frac{R - R'}{R} + \frac{R'}{R}\sigma,$$

y haciendo

$$\frac{R - R'}{R} = s,$$

será:

$$s' = s + (1 - s)\sigma. \tag{41}$$

La expresión general de la densidad (5) es:

$$\delta'' = \delta'(1 - i's' - i'_1 s'^2 - i'_2 s'^3 \ldots), \tag{42}$$

sustituyendo por s' su valor (41), se obtiene un desarrollo ordenado según las potencias de la nueva variable σ que, conservando la analogía de forma, podrá representarse por:

$$\delta'' = \delta\,(1 - i''\,\sigma - i_1''\,\sigma^2 - i_2''\,\sigma^3 \ldots);$$

pero con arreglo á la (42)

$$\delta = \delta'\,(1 - i'\,s - i_1'\,s^2 - i_2'\,s^3 \ldots),$$

sustituyendo y reuniendo los términos en que éntre la misma potencia de la variable σ, se obtiene:

$$i'' = \frac{\delta'}{\delta''}\,(i' + 2i_1'\,s + 3\,i_2'\,s^2 \ldots)\,(1 - s)$$

$$i_1'' = \frac{\delta'}{\delta''}\,(i_1' + 3\,i_2'\,s + 6\,i_3'\,s^2 \ldots)\,(1 - s)^2;$$

.....

y como en el supuesto admitido i_1' y los demás coeficientes que siguen son iguales á cero (23), será:

$$i'' = \frac{\delta'}{\delta''}\,(1 - s)\,i'.$$

Para mayor comodidad en el cálculo, convendrá sustituir por s su valor en función de los radios vectores, tomando para el de la estación superior el mismo aproximado R_a'' que haya

servido para determinar i', con lo cual la expresión anterior se convierte en:

$$i'' = \frac{\delta'}{\delta''} \cdot \frac{R'}{R''_a} \cdot i'. \tag{43}$$

Esta fórmula y las análogas á las de la estación inferior, servirán en todos los casos para calcular la diferencia de nivel.

Cuando la distancia cenital observada en la estación inferior exceda de 90° *(Figura 3)*, se toma para z' el suplemento, como se ha indicado ya; y suponiendo que se opera con la figura que resultaría de hacer girar las líneas correspondientes al punto A alrededor de la recta CA, habrá que considerar como negativos, para el cálculo, los ángulos v y V', á pesar de ser positivos en la figura primitiva.

Empleando para obtener i' el sistema adoptado de determinar su valor por la condición de que satisfaga á las densidades del aire en las dos estaciones, resultan las diferencias de nivel con un error constante, que es generalmente positivo, cuando se ha calculado por la estación inferior, y negativo, si se conocía la distancia cenital de la superior. Por esta razón conviene verificar observaciones meteorológicas y de distancias cenitales recíprocas, aunque no simultáneas estas últimas, para obtener dos series de valores de la diferencia de nivel, y poder tomar el promedio general.

Conocido el desnivel entre dos puntos, puede calcularse la refracción que haya afectado á cada una de las distancias cenitales observadas, deduciendo coeficientes de refracción, que

podrán ser de grande utilidad para determinar las cotas de muchos puntos de poca importancia geodésica, en que sólo se hayan hecho observaciones cenitales no recíprocas. Comenzando por la estación inferior, la ecuación (34) podrá escribirse así:

$$R' \text{ sen. } (z'_0 + \theta') = R'' \text{ sen. } (z'_0 + \theta' - v);$$

é introduciendo la variable s' (2) calculada con los valores definitivos de R' y R'', se tendrá, después de algunas transformaciones:

$$\text{(44)} \qquad \text{cotg. } (z'_0 + \theta') = \frac{s'}{\text{sen. } v} - \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, v.$$

Para la estación superior la misma ecuación (34) da:

$$R' \text{ sen. } (z''_0 + \theta'' - v) = R'' \text{ sen. } (z''_0 + \theta''),$$

de la cual se deduce:

$$\text{(45)} \qquad \text{cotg. } (z''_0 + \theta'') = \text{cotg. } v - \frac{R''}{R' \text{ sen. } v}.$$

Por medio de las (44), (45), se calcula la distancia cenital verdadera; y restando de ella cada una de las aparentes observadas, resultarán las refracciones correspondientes.

Designando:

$\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3 \ldots \theta'_n \ldots$ estas refracciones en la estación inferior (44),

$\theta''_1, \theta''_2, \theta''_3 \ldots \theta''_n \ldots$ las que hayan resultado en la superior (45),

K... el coeficiente de refracción ó la cantidad por la cual hay que multiplicar el ángulo en el centro v para obtener la suma de las dos refracciones,
será:

$$(46) \qquad K = \frac{(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots \theta'_n) + (\theta''_1 + \theta''_2 + \ldots \theta''_n)}{n\,v}.$$

Establecidas ya las fórmulas que requiere este sistema de observación, pueden aplicarse á un caso práctico, cuyos resultados se compararán á los obtenidos por los medios indicados anteriormente.

La nivelación de la base de Madridejos, citada ya al tratar del método de observación por distancias cenitales recíprocas y simultáneas, se presta muy bien á esta aplicación, por haberse estudiado convenientemente el estado del aire al mismo tiempo que se observaban las distancias al cenit. Al lado de cada uno de los teodolitos se colocaba un barómetro de Fortin y un termómetro centigrado, resguardado de los rayos del sol, y exento, en lo posible, de irradiaciones locales; todos los instrumentos meteorológicos se habían comparado cuidadosamente, determinando las pequeñas correcciones que debían sufrir las observaciones directas.

Cada distancia cenital iba de esta manera acompañada de la presión atmosférica y temperatura del aire, observadas no sólo en aquel punto, sino en el que servía de señal; y puede, por consiguiente, calcularse la diferencia de nivel por la trayectoria luminosa que tuvo lugar en el momento de la obser-

vación, prescindiendo de la distancia cenital simultánea, medida en el otro vértice, y que se supondrá desconocida.

De las observaciones hechas, he introducido en el cálculo las necesarias para obtener la diferencia de nivel entre cada dos puntos por 24 trayectorias luminosas diferentes, partiendo la mitad de ellas de la estación superior, y la otra mitad de la inferior, y tomando después el promedio de todos los valores.

Las fórmulas correspondientes á la estación inferior y á la superior son, con arreglo á lo dicho anteriormente, las siguientes:

Primera aproximación, suponiendo la refracción nula.

$$x = \frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2} v}{\text{tang.}\ (z' - \frac{1}{2} v)}$$

$$R_a'' - R' = \frac{2 R' x}{1 - x}$$

$$s = \frac{R_a'' - R'}{R_a''}$$

Fórmulas relativas á la estación inferior.

$$\delta' = \frac{p'}{0^m,76\,(1 + \varepsilon t')} \qquad \delta'' = \frac{p''}{0^m,76\,(1 + \varepsilon t'')}$$

$$\alpha' = \frac{2 k \delta'}{1 + 4 k \delta'}$$

$$i' = \left(1 - \frac{\delta''}{\delta'}\right) \frac{1}{s}$$

$$\text{tang.}\ y' = \frac{i' \alpha'}{(1 - i' \alpha')\ \text{tang.}\ z'}$$

$$V' = -(90^0 - z' + y')$$

$$C' = \frac{i' \alpha' - \text{sen.}^2\ z'}{\text{sen.}^2\ z' \cos.\ V'}$$

$$s' = 2\ C'\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2} v\ \text{sen.}\ (V' - \tfrac{1}{2} v)$$

$$R'' - R' = \frac{R' s'}{1 - s'}$$

Fórmulas relativas á la estación superior.

$$\delta' = \frac{p'}{0^m,76\,(1 + \varepsilon t')} \qquad \delta'' = \frac{p''}{0^m,76\,(1 + \varepsilon t'')}$$

$$\alpha'' = \frac{2 k \delta''}{1 + 4 k \delta''}$$

$$i'' = \frac{\delta'}{\delta''} \cdot \frac{R'}{R_a''} \cdot i'$$

$$\text{tang.}\ y'' = \frac{i'' \alpha''}{(1 - i'' \alpha'')\ \text{tang.}\ z''}$$

$$V'' = -(90^0 - z'' + y'')$$

$$C'' = \frac{i'' \alpha'' - \text{sen.}^2\ z''}{\text{sen.}^2\ z'' \cos.\ V''}$$

$$s'' = 2\ C''\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2} v\ \text{sen.}\ (V'' - \tfrac{1}{2} v)$$

$$R' - R'' = \frac{R_a'' s''}{1 - s''}$$

Las dos páginas que siguen presentan la *norma del cálculo logarítmico* para dos trayectorias luminosas que en distinta época partieron, una de la estación superior y otra de la inferior, siendo, por consiguiente, conocido el valor de z' en el primer caso, y el de z'' en el segundo. La diferencia de nivel se obtiene de esta manera con gran facilidad y en breve tiempo, empleando el valor de s deducido de las trayectorias que se hayan calculado anteriormente.

TRAYECTORIA LUMINOSA

ENTRE B Y A

EL DÍA 11 DE OCTUBRE DE 1859, Á LAS $0^h\ 40^m$.

$v = 0^\circ\ 4'\ 1'',528$

CÁLCULO POR LA ESTACIÓN INFERIOR A.

N.º 1.

$p' = 0^m,69809$ $\quad t' = 11^\circ,7$ $\quad z'_0 = 89^\circ\ 19'\ 38'',29$

$z' = 89\ 19\ 38,29$

$\varepsilon..\ 0,00366$

$t'..\ 11,7$

2562

366

366

$\log.\ (1+\varepsilon t')..\ 0,01821018$ $\quad 1+\varepsilon t'..\ 1,042822$

$\log.\ 0,76..\ 9,88081359$

$-\log.\ \text{Denom}..\ 9,89902377$

$\log.\ p'..\ 9,84391142$

$\log.\ \delta'..\ 9,94488765$

$\log.\ 4\,k..\ 6,76924953$

$\log.\ 4\,k\delta'..\ 6,71413718$ $\quad 4\,k\delta'..\ 0,000517770$

$-\log.\ (1+4\,k\delta')..\ 0,00022480$

$\log.\ 2\,k\delta'..\ 6,41310718$

$\log.\ \alpha'..\ 6,41288238$

$\log.\ (\delta'' : \delta')..\ 9,99695519$ $\quad (\delta'' : \delta')..\ 0,993013593$

$\log.\ (1-(\delta'' : \delta'))..\ 7,84425389$ $\quad 1-(\delta'' : \delta')..\ 0,006986407$

$-\log.\ s..\ 5,15825183$

$\log.\ i'..\ 2,68600206$

$\log.\ \alpha'..\ 6,41288238$

$\log.\ i'\,\alpha'..\ 9,09888444$ $\quad i'\,\alpha'..\ 0,125569578$

$-\log.\ (1-i'\,\alpha')..\ 9,94172526$ $\quad 1-i'\,\alpha'..\ 0,874430422$

$9,15715918$

$-\log.\ \text{tang.}\ z'..\ 1,93028305$

$\log.\ \text{tang.}\ y'..\ 7,22687613$

$-\log.\ \text{tang.}\ 1''..\ 4,68557487$

$2,54130126$ $\quad y'..\ 0^\circ\ 5'\ 47'',777$

$90^\circ + y'..\ 90\ 5\ 47,777$

$-z'..\ 89\ 19\ 38,29$

$\log.\ \cos.\ V'..\ 9,99996086$ $\quad V'..\ 0\ 46\ 9,487$

$2\ \log.\ \text{sen.}\ z'..\ 9,99994014$ $\quad \text{sen.}^2 z'..\ 0,999862189$

$-\log.\ \text{Denom}..\ 9,99990100$

$\log.\ (i'\,\alpha' - \text{sen.}^2 z')..\ 9,941656811_n$ $\quad i'\,\alpha' - \text{sen.}^2 z'..\ -0,874292611$

$\log.\ C'..\ 9,941755811_n$

$\log.\ 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,v..\ 7,06854233$

$\log.\ \text{sen.}\ (V' - \tfrac{1}{2}\,v)..\ 8,146496211_n$ $\quad V' - \tfrac{1}{2}\,v..\ -48'\ 10'',251$

$\log.\ s'..\ 5,15679435$ $\quad s'..\ 0,000014348$

$\log.\ R'..\ 6,80411126$

$\log.\ R'\,s'..\ 1,96090561$

$-\log.\ (1-s')..\ 9,99999376$ $\quad 1-s'..\ 0,999985652$

$\log.\ (R''-R')..\ 1,96091185$ $\quad R''-R'..\ 91,393$

$-0,121$

Referido al terreno..... $91,272$

$p'' = 0^m,69005$ $\quad t'' = 10^\circ,4$

$\varepsilon..\ 0,00366$

$t''..\ 10,4$

1464

366

$\log.\ (1+\varepsilon t'')..\ 0,01622413$ $\quad 1+\varepsilon t''..\ 1,038064$

$\log.\ 0,76..\ 9,88081359$

$-\log.\ \text{Denom}..\ 9,89703772$

$\log.\ p''..\ 9,83888056$

$\log.\ \delta''..\ 9,94184284$

TRAYECTORIA LUMINOSA

ENTRE **A** Y **B**

EL DÍA 12 DE OCTUBRE DE 1859, Á LAS $3^h\ 37^m$.

$v = 0^\circ\ 4'\ 1'',528$

CÁLCULO POR LA ESTACIÓN SUPERIOR **B**.

N.º 12.

$p' = 0^m,69959$ $\quad t' = 17^\circ,2$

ε..	0,00366
t'..	17,2
	732
	2562
	366
$1+\varepsilon t'$..	1,062952

log. $(1+\varepsilon t')$..	0,02651366
log. 0,76..	9,88081359
—log. Denom..	9,90732725
log. p'..	9,84484359
log. δ'..	9,93751634
log. $(\delta'':\delta')$..	9,99669712
log. $(1-(\delta'':\delta'))$..	7,87945854
—log. s..	5,15635329
log. i'..	2,72310525
log. $(\delta':\delta'')$..	0,00330288
log. R'..	6,80411126
comp. log. R'_a..	3,19588251
log. i''..	2,72640190
log. α''..	6,40221364
log. $i''\alpha''$..	9,12861554
—log. $(1-i''\alpha'')$..	9,93728366
	9,19133188
—log. tang. z''..	1,89448219
log. tang. y''..	7,29684969
—log. tang. x''..	4,68557487
	2,61127482
log. cos. V'''..	9,99995288
2 log. sen. z''..	9,99992936
—log. Denom..	9,99988224
log. $(i''\alpha''-\text{sen.}^2 z'')$..	$9,93720206_n$
log. C'..	$9,93731982_n$
log. 2 sen. $\frac{1}{2}v$..	$7,06854233_n$
log. sen. $(V'''-\frac{1}{2}v)$..	$8,15058524_n$
log. s''..	$5,15644739_n$
log. R''_a..	6,80411749
log. $R''_a\ s''$..	$1,96056488_n$
—log. $(1-s'')$..	0,00000622
log. $(R'-R'')$	$1,96055866_n$

$i''\alpha''$..	0,134466944
$1-i''\alpha''$..	0,865533056
y''..	$0^\circ\ 6'\ 48'',578$
$90^\circ+y''$..	90 6 48,578
$-z''$..	89 16 10,22
V'''..	— 50 38,358
sen.$^2 z''$..	0,999837373
$i''\alpha''-\text{sen.}^2 z''$..	—0,865370429
$V'''-\frac{1}{2}v$..	$-\ 4'\ 37'',594$
s''..	—0,000014337
$1-s''$..	1,000014337
$R'-R''$..	—91,318
	+ 0,121
Referido al terreno.....	—91,197

$p'' = 0^m,69166$ $\quad t'' = 16^\circ,1$ $\quad z''_0 = 90^\circ\ 43'\ 49'',78$

$z'' = 89\ 16\ 10,22$

ε..	0,00366
t''..	16,1
	366
	2196
	366
$1+\varepsilon t''$..	1,058926

log. $(1+\varepsilon t'')$..	0,02486561	$1+\varepsilon t''$..	1,058926
log. 0,76..	9,88081359		
—log. Denom..	9,90567920		
log. p''..	9,83989266		
log. δ''..	9,93421346		
log. $4k$..	6,76924953		
log. $4k\delta''$..	6,70346299	$4k\delta''$..	0,000505200
—log. $(1+4k\delta'')$..	0,00021935		
log. $2k\delta''$..	6,40243299		
log. α''..	6,40221364		

En el *Estado* siguiente se hallan, reducidos al pie de los pilares de observación, los diferentes valores de $R'' - R'$, obtenidos por la estación inferior y por la superior de cada uno de los lados AB, BC, los errores probables parciales y el general de la nivelación entre A y C.

NIVELACIÓN DE LA BASE DE MADRIDEJOS.

$R' = 6369586^{m},804.$

B—A $v = 0^{\circ}\ 4'\ 1'',528.$			B—C $v = 0^{\circ}\ 4'\ 4'',512.$		
ESTACIONES.	$R'' - R'$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	ESTACIONES.	$R'' - R'$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.
	m	m		m	m
Inferior A.	91,272	— 0,083	Inferior C.	88,681	— 0,008
	91,157	+ 0,032		88,690	— 0,017
	91,136	+ 0,053		88,696	— 0,023
	91,145	+ 0,044		88,670	+ 0,003
	91,177	+ 0,012		88,495	+ 0,178
	91,210	— 0,021		88,512	+ 0,161
	91,319	— 0,130		88,681	— 0,008
	91,257	— 0,068		88,670	+ 0,003
	91,281	— 0,092		88,690	— 0,017
	91,128	+ 0,061		88,676	— 0,003
	91,314	— 0,125		88,654	+ 0,019
	91,190	— 0,001		88,626	+ 0,047
Superior B.	91,075	+ 0,114	Superior B.	88,680	— 0,007
	91,134	+ 0,055		88,826	— 0,153
	91,139	+ 0,050		88,680	— 0,007
	91,327	— 0,138		88,680	— 0,007
	91,358	— 0,169		88,803	— 0,130
	91,129	+ 0,060		88,670	+ 0,003
	91,017	+ 0,172		88,672	+ 0,001
	91,143	+ 0,046		88,798	— 0,125
	91,108	+ 0,081		88,733	— 0,060
	91,069	+ 0,120		88,497	+ 0,176
	91,261	— 0,072		88,690	— 0,017
	91,197	— 0,008		88,691	— 0,018
PROMEDIOS...	91,189	0,075	PROMEDIOS...	88,673	0,050
	$e_1 = 0^{m},061$			$e_2 = 0^{m},055$	

$\Delta = \pm 0^{m},082$

Comparando estas diferencias de nivel con las obtenidas por medio de distancias cenitales recíprocas y simultáneas, resulta lo siguiente:

	1.ER MÉTODO. — Por 60 pares de distancias cenitales simultáneas.	3.ER MÉTODO. — Por 24 distancias cenitales y las densidades del aire.	DIFERENCIAS.
	m	m	m
B — *A*	91,177	91,189	— 0,012
B — *C*	88,677	88,673	+ 0,004
C — *A*	2,500	2,516	— 0,016

El acuerdo que presentan los valores de los desniveles hallados por ambos métodos es tan grande como se podía apetecer; demostrando prácticamente la precisión que puede alcanzarse por el último, aun reduciendo á la tercera parte el número de determinaciones.

Á pesar de esta considerable diminución de observaciones, el error probable es tan sólo doble del obtenido por el primer método, é igual al que resulta de 120 distancias cenitales simultáneas entre *A* y *C*.

En las nivelaciones geodésicas, propiamente dichas, cuyos vértices se eligen de manera que reunan las condiciones necesarias para un trabajo especial, ofrece esta aproximación toda la exactitud necesaria. La teoría abraza, además, todos los casos que puedan presentarse, determinando experimentalmente dos ó más puntos intermedios de la trayectoria por medio de la relación parabólica que liga las presiones atmos-

féricas á las densidades del aire. Esta determinación, aun limitándola á dos puntos, requiere que se observen, al mismo tiempo que la distancia cenital y las densidades en los extremos, las presiones y temperaturas en dos parajes situados en la masa de aire que deba cruzar la trayectoria, ó en capas tan poco distantes, que la parábola deducida pueda considerarse suficientemente aproximada para la misma masa; trabajo que presenta grandes inconvenientes, porque además de las dificultades relativas á la elección de las estaciones intermedias, exige la simultaneidad de observaciones con un teodolito, cuatro barómetros y cuatro termómetros. Por esta causa he considerado desde el principio, únicamente la aproximación fundada en la hipótesis de que el decremento de las densidades de las capas atmosféricas, en una masa de aire de poco espesor, sea proporcional á la primera potencia de la variable s'; prescindiendo del caso general, así como de otra aproximación que proporciona la suma de las refracciones en los puntos extremos, pero que exige también la determinación de dos ó más intermedios pertenecientes á la trayectoria luminosa.

CONCLUSIÓN DE LA PARTE PRIMERA.

Si se tiene en cuenta la longitud de las diferentes líneas de nivelación que se han citado, podrán compararse entre sí los errores probables obtenidos, reduciéndolos al kilómetro de distancia; con lo cual se halla:

En Francia, por el primer método.....	± 0,0034	por kilómetro.
En Prusia, por el mismo.....	± 0,0036	—
En Rusia, por el segundo método.....	± 0,0003	—
En España, por el primero.....	± 0,0027	—
En España, por el tercero.....	± 0,0055	—

cuyos resultados manifiestan la exactitud á que se puede llegar en las nivelaciones hechas con esmero por los tres métodos indicados.

Para la aplicación del de distancias cenitales recíprocas y simultáneas, es indispensable determinar la flexión de los anteojos de los dos teodolitos, porque la diferencia de los valores de esta flexión afecta al resultado de cada determinación parcial de desnivel, entrando siempre con el mismo signo; exige dos observadores y dos goniómetros, y obliga algunas veces á perder tiempo para obtener la simultaneidad completa. En cambio, proporciona excelentes resultados siempre que, en circunstancias desfavorables del terreno, se elijan convenientemente las horas de observación.

El sistema de observar cada dos vértices desde una estación

intermedia, presenta algunas dificultades en la práctica para la elección de puntos, de manera que las distancias que los separen sean próximamente iguales, y que el terreno ofrezca simetría en ambas direcciones; pero tiene á su favor las circunstancias de no influir en el resultado la desigual flexión de los anteojos, y de exigir menos reducciones, por quedar eliminada la posición del instrumento.

El tercer método, ó sea la medición de una distancia cenital simple y las observaciones meteorológicas necesarias para conocer las densidades del aire en la estación y al lado de la señal, no ofrece dificultad alguna, necesitando un solo goniómetro y un observador, pues para las lecturas barométricas y termométricas se adiestra en algunos días á los auxiliares menos instruídos.

Para reunir todas las garantías necesarias de exactitud, y no hacer el trabajo en extremo penoso y de larga duración, podría adoptarse un sistema mixto, en que se obtendrían dos resultados completamente independientes, deducido el uno del primer método de observación, y el otro del tercero. Con los teodolitos colocados en A' y B' *(Figura 4)*, se observarían recíproca y simultáneamente las distancias cenitales de los dos primeros vértices, acompañando á cada observación las barométricas y termométricas en ambas estaciones. Así podría calcularse por el primer método el desnivel entre A' y B'; y además, suponiendo sólo conocida la distancia cenital de B', proporcionaría el tercer método el mismo desnivel por la trayectoria luminosa entre B' y A', calculada por la estación A'. Permaneciendo en sus mismos puestos los aparatos meteoroló-

gicos, se trasladaría el primer observador con su teodolito á A'', pasando el de B' á B''. Observada desde A'' la distancia cenital de A' con las presiones y temperaturas del aire en ambos puntos, el tercer método daría la diferencia de nivel que debería combinarse con la primera que se hubiese obtenido por el mismo proceder, tomando su promedio, que sería un valor independiente del que hubiese resultado de las distancias cenitales recíprocas y simultáneas. Trasladando el barómetro y termómetro de A' á B'', se operaría del mismo modo entre A'' y B'', continuando así hasta el extremo de la línea. Si quisiera evitarse la pérdida de tiempo que resultaría de esperar que el auxiliar se trasladase con sus aparatos desde A' á B'', podría acelerarse la operación teniendo un tercer auxiliar con barómetro y termómetro, que se situaría en B'' al empezar, pasando el primero desde A' á B''', y así sucesivamente los demás. Este sistema equivaldría á una doble nivelación por métodos diferentes, pero con una economía considerable de tiempo y de gastos.

PARTE SEGUNDA.

En los vértices de las redes geodésicas de primer orden, no sólo se observan los ángulos azimutales que forman las diferentes direcciones de las líneas que los unen entre sí, sino que, utilizando la instalación de los instrumentos en puntos tan notables, se miden igualmente desde cada uno las distancias aparentes al cenit, de los demás que le rodean. Este sistema proporciona una gran masa de observaciones recíprocas para cada dos puntos; pero en el cálculo de los respectivos desniveles es preciso considerarlas como simultáneas, en razon á carecer de elementos para determinar la refracción terrestre que haya afectado á las distancias cenitales observadas. Para atenuar en lo posible los grandes errores que podría traer consigo este método de cálculo si se combinasen observaciones hechas arbitrariamente, se ha procurado investigar en cada país las horas del día en que la refracción sufre menores cambios, procurando operar en aquellas que la experiencia ha presentado como más favorables. Pero acerca de esto se hallan muy poco conformes los resultados obtenidos por distintos observadores: mientras unos aconsejan que se midan las distan-

cias cenitales cuando las imágenes de las señales se presentan con un ligero movimiento, otros prefieren el máximo de ondulación con tal que permita la puntería, y por último, la perfecta tranquilidad de la imagen ha coincidido en algunos países con la mínima variación en la refracción terrestre. Sin embargo, el observador conoce, después de algún tiempo de práctica, cuál es la época más favorable en cada comarca, y los resultados son generalmente aceptables, si bien presentan algunas veces discordancias excepcionales de bastante consideración.

Sería, por consiguiente, muy útil hallar un medio de hacer la nivelación á grandes distancias, sin tener que recurrir á una hipótesis tan arbitraria como la que se adopta; y el deseo de hacer experiencias en este sentido, me movió á promover un trabajo especial de nivelación entre dos puntos separados por una distancia considerable. Tratándose de un ensayo cuyo resultado, en el caso de ser satisfactorio, podía servir para aplicar el sistema á las triangulaciones que se emprendan en lo sucesivo, creí conveniente elegir dos puntos que presentasen circunstancias desfavorables: el Observatorio de Madrid y la torre de Ocaña, en que se halla uno de los vértices de la cadena de triángulos que cruza la Península en dirección del Meridiano de la capital, fueron los designados. La distancia que los separa es de $52\,266^{m}$; las trayectorias luminosas que van de uno á otro, cruzan los ríos Tajo y Jarama, y pasan rasando al arbolado en la parte próxima á Ocaña.

Como la diferencia de nivel no era conocida con suficiente exactitud para comparar con ella el resultado que se

obtuviese por observaciones no simultáneas, me propuse determinarla también por distancias cenitales recíprocas y simultáneas.

La operación se dividía, pues, en dos partes: la primera debía consistir en un número bastante considerable de observaciones cenitales recíprocas y simultáneas, acompañadas de las meteorológicas correspondientes; la segunda debía componerse sólo de distancias cenitales de Ocaña, observadas desde Madrid, con las presiones atmosféricas y temperaturas del aire, determinadas en ambas estaciones al mismo tiempo que se hiciese cada medición angular. De la primera serie de observaciones podría deducirse, tanto la diferencia de nivel para término de comparación, como el resultado de cierto número de trayectorias luminosas entre Madrid y Ocaña, calculadas por este último punto. La segunda serie tendría por objeto la determinación del mismo desnivel, deducido de igual número de trayectorias calculadas por la estación de Madrid.

Los mismos teodolitos empleados en la nivelación de la base de Madridejos fueron los que sirvieron para las nuevas observaciones, lo cual hizo innecesario el estudio preliminar de los instrumentos y las experiencias relativas á la flexión de los anteojos. En el teodolito de Repsold se hizo uso de otro nivel, en el cual una parte ó división tenía un valor angular de 2″,27.

Se observaron por espacio de catorce días dos barómetros portátiles del sistema Fortin, construídos por M. Winckelmann, de París, á fin de determinar la corrección que debía introducirse para que las observaciones fuesen comparables. El diá-

metro interior de los tubos de ambos barómetros es de $0^m,008$, apreciándose en la escala por medio de un nonio las décimas y aun las centésimas de milímetro. El *Estado* siguiente contiene todo lo relativo á esta comparación.

COMPARACIÓN DE LOS BARÓMETROS N.° 2 Y N.° 8.

Días.	Horas.	BARÓMETRO N.° 2.			BARÓMETRO N.° 8.			Diferencias. — N.° 8.—N.° 2.
		Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0°.	Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0°.	
	h m	mm	°	mm	mm	°	mm	mm
25 enero.	2 5	713,26	15,0	711,53	714,10	15,2	712,35	+ 0,82
26 —	12 0	714,55	12,1	713,16	715,30	11,7	713,95	+ 0,79
	3 47	714,00	12,3	712,58	714,82	12,0	713,44	+ 0,86
27 —	12 30	715,10	15,2	713,35	715,90	15,5	714,12	+ 0,77
28 —	12 45	714,35	14,1	712,73	715,30	14,4	713,64	+ 0,91
	3 0	713,35	15,1	711,61	714,50	16,4	712,61	+ 1,00
29 —	12 43	711,30	14,8	709,61	712,20	14,9	710,50	+ 0,89
	3 41	710,05	14,6	708,38	711,00	14,8	709,31	+ 0,93
	5 31	708,55	13,6	707,00	709,60	13,6	708,05	+ 1,05
1 febrero.	12 40	711,50	14,4	709,85	712,40	13,9	710,81	+ 0,96
	3 50	710,95	15,1	709,22	711,85	15,5	710,08	+ 0,86
3 —	3 0	715,30	14,5	713,58	715,20	15,5	714,62	+ 1,04
4 —	12 20	712,10	14,5	710,44	712,95	14,4	711,29	+ 0,85
	3 10	710,90	15,2	709,16	711,90	15,2	710,16	+ 1,00
5 —	12 30	709,20	16,6	707,30	710,05	16,9	708,12	+ 0,82
	3 0	707,80	16,2	705,95	708,85	17,4	706,86	+ 0,91
6 —	12 20	704,90	11,7	703,57	705,65	11,6	704,33	+ 0,76
10 —	11 58	695,00	9,7	693,91	695,88	9,7	694,79	+ 0,88
11 —	12 15	696,45	11,9	695,12	697,30	12,0	695,96	+ 0,84
	2 30	694,60	12,5	693,20	695,65	13,2	694,17	+ 0,97
12 —	12 7	702,40	14,5	700,77	703,20	13,9	701,62	+ 0,85
13 —	12 0	709,60	13,9	708,03	710,50	13,6	708,95	+ 0,92
							Promedio.....	+ 0,89

Para conocer con la aproximación necesaria la temperatura del aire, se conceptuó suficiente emplear los termómetros centigrados de Fastré, que llevan consigo nuestras brigadas geodésicas de primer orden; pero se compararon antes con uno de los tipos divididos en partes de igual capacidad, que sirvieron en las experiencias hechas con el aparato de medir bases.

En la página que sigue se hallan los resultados de la comparación de cuatro termómetros libres y los dos de los barómetros, con el tipo núm. 800; habiéndose formado una pequeña tabla de las correcciones que se adoptaron para cada uno de los termómetros, en cuatro puntos de su escala.

COMPARACIÓN DE TERMÓMETROS.

Días.	Horas.	Tipo N.º 800.		N.º 109.	N.º 118.	N.º 123.	N.º 124.	Del barómetro N.º 2.	Del barómetro N.º 8.
	h m	p	°	°	°	°	°	°	°
6 febrero.	1 0	161,9	11,82(*)	12,5	12,4	12,0	12,6	13,0	13,6
		161,8	11,80	12,4	12,4	11,9	12,6	13,0	13,5
		162,1	11,85	12,3	12,2	11,8	12,5	13,0	13,4
		162,4	11,89	12,4	12,3	11,8	12,5	13,0	13,3
		162,5	11,90	12,3	12,2	11,8	12,5	13,0	13,2
		162,5	11,90	12,3	12,2	11,9	12,5	13,0	13,1
			11,9	12,4	12,3	11,9	12,5	13,0	13,3
	21 3	64,5	— 2,29	— 1,2	— 1,7	— 1,8	— 1,6	— 1,1	— 1,2
		65,4	— 2,16	— 1,2	— 1,5	— 1,7	— 1,5	— 1,0	— 1,0
		68,2	— 1,75	— 0,8	— 1,2	— 1,5	— 1,2	— 1,0	— 1,0
			— 2,1	— 1,1	— 1,5	— 1,7	— 1,4	— 1,0	— 1,1
	21 43	130,9	7,33	7,7	7,8	7,1	7,6	7,0	7,0
		131,0	7,34	8,0	8,0	7,3	7,7	7,2	7,0
		131,9	7,47	8,0	8,1	7,2	7,9	7,5	7,4
			7,4	7,9	8,0	7,2	7,7	7,2	7,1
7 —	21 21	191,3	16,07	17,3	17,5	17,4	17,6	17,5	17,6
		190,8	16,00	17,3	17,5	17,4	17,6	17,6	17,6
		191,9	16,16	17,3	17,6	17,5	17,7	17,7	17,8
			16,1	17,3	17,5	17,4	17,6	17,6	17,7

Termómetros.	CORRECCIONES.			
	Hasta 4°,0.	De 4°,1 á 10°,0.	De 10°,1 á 15°,0.	Desde 15°,1.
	°	°	°	°
N.º 109	— 1,0	— 0,5	— 0,5	— 1,2
118	— 0,6	— 0,6	— 0,4	— 1,4
123	— 0,4	+ 0,2	0,0	— 1,3
124	— 0,7	— 0,3	— 0,6	— 1,5
2	— 1,1	+ 0,2	— 1,1	— 1,5
8	— 1,0	+ 0,3	— 1,4	— 1,6

(*) Para la reducción á grados centesimales de las lecturas hechas en el tipo N.º 800, se ha empleado la tabla publicada en el *Apéndice* N.º 3 de la obra *Experiencias hechas con el aparato de medir bases, por los Coroneles D. Carlos Ibáñez* y *D. Frutos Saavedra Meneses;* introduciendo la corrección 2p,7, deducida el día 6 de febrero de la determinación del punto 0°.

Los instrumentos se colocaron en ambas estaciones de una manera análoga: el teodolito en el pilar geodésico, cubierto por una tienda de observación; el barómetro á corta distancia y al abrigo de los rayos del sol; el termómetro guarecido por un ligero sombrajo giratorio y distante de los objetos que pudieran producir irradiaciones perjudiciales; el heliotropo que había de servir de señal, muy inmediato á la tienda, y á una altura calculada de modo que pudiesen tomarse las trayectorias luminosas como si hubiesen partido del ocular mismo del teodolito próximo al heliotropo; un cronómetro de Dent dentro de la tienda, para conseguir la completa simultaneidad de las observaciones sin tener que multiplicar las señales.

Un auxiliar estaba encargado de manejar el heliotropo, y otro de hacer las lecturas barométricas y termométricas en cada estación. En la de Madrid se colocó el teodolito de Brunner, situándose en Ocaña el de Repsold.

Todos los días, antes de principiar las observaciones y después de una serie de breves ocultaciones de la luz heliotrópica, se comparaban los cronómetros por medio de otras ocultaciones hechas en Ocaña de minuto en minuto, comenzando por un múltiplo de cinco, y observadas en Madrid; cuyo método daba á conocer al observador de este último punto la hora que marcaba el cronómetro de Ocaña, con una precisión innecesaria para el caso, pero que manifiesta los buenos resultados que en otra clase de trabajos pueden obtenerse de las señales instantáneas que proporciona el heliotropo.

Tanto las observaciones de distancias cenitales como las meteorológicas correspondientes, debían hacerse de diez en diez minutos, empezando por 0, 10, 20, etc., del cronómetro de Ocaña, al cual se arreglaba el observador de Madrid. Si un minuto antes de la hora de observación se veía en malas condiciones la luz heliotrópica de la otra estación, se mandaba cubrir completamente el espejo del heliotropo, con lo cual se imposibilitaba la observación desde el otro vértice, sirviendo además esta desaparición de señal, que repetía el otro observador, para manifestar que estaba enterado. La ocultación duraba tres minutos, pasados los cuales se enviaban de nuevo la luz ambas estaciones. Cuando no se descubría la luz, se avisaba un minuto antes de la hora de observación por medio de una serie de ocultaciones que duraba tres minutos, dejando después descubierto el espejo. La señal de suspender el trabajo era otra serie de veinte ocultaciones, dejando después cubierto el espejo; contestaba la otra estación, y repetía la primera que había hecho la señal.

Deseando que variasen todo lo posible las temperaturas y presiones atmosféricas para que las trayectorias luminosas tuviesen lugar en condiciones diferentes, fué generalmente corto el número de observaciones que se hicieron seguidas. La variación de la temperatura en los doce días que se invirtieron en este primer trabajo, fué en Madrid de $15^{c},3$, y en Ocaña de $17^{c},0$; la presión varió $18^{mm},2$ en una, y $17^{mm},5$ en otra. Comenzaba la observación tan pronto como el movimiento de las imágenes lo permitía, terminándola de intento en hora muy desfavorable, habiendo

distancias cenitales medidas pocos minutos antes de ponerse el sol.

En los *Estados* siguientes se hallan reunidas todas las observaciones de distancias cenitales hechas simultáneamente en Madrid y en Ocaña, así como las observaciones meteorológicas que acompañaron á las primeras.

OBSERVACIONES DE DISTANCIAS CENITALES SIMULTÁNEAS.

ESTACIÓN DE MADRID. — OBJETO OCAÑA. 21 Y 22 DE FEBRERO; 5, 9 Y 10 DE MARZO DE 1 864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	P P	″	°	D V P	′ ″	D V P	′ ″	° ′ ″
1	3 50	15,9 39,2	+10,89	0	5 1 1,2	27 1,77	5 1 1,7	27 2,86	0 27 2,31
		28,0 51,3		180	3 0 7,7	15 15,32	2 2 24,3	14 47,34	180 15 1,33
2	4 0	21,8 45,3	— 3,55	180	2 2 24,2	14 46,91	2 2 9,0	14 16,88	180 14 31,89
		25,7 49,3		0	5 1 9,2	27 17,69	5 1 11,2	27 21,78	0 27 19,73
3	30	25,6 49,5	— 8,14	0	5 1 10,9	27 21,07	5 1 11,8	27 22,98	0 27 22,02
		16,5 40,5		180	2 2 21,0	14 40,55	2 2 6,7	14 12,30	180 14 26,42
4	40	17,5 41,5	— 8,41	180	2 2 21,5	14 41,54	2 2 6,1	14 11,10	180 14 26,32
		26,7 51,0		0	5 1 14,4	27 28,03	5 1 16,3	27 31,94	0 27 29,98
5	50	16,7 41,0	+ 8,82	0	5 1 0,8	27 0,97	5 1 2,5	27 4,46	0 27 2,71
		26,3 51,0		180	3 0 4,9	15 9,75	2 2 20,1	14 38,98	180 14 54,36
6	— 4 40	15,1 39,5	— 5,35	20	8 0 36,9	41 13,42	8 0 40,5	41 20,65	20 41 17,03
		9,1 33,6		200	5 1 47,8	28 34,49	5 1 30,4	28 0,01	200 28 17,25
7	50	7,8 32,2	— 4,23	200	5 1 46,8	28 32,50	5 1 28,7	27 56,63	200 28 14,56
		12,5 36,9		20	8 0 35,4	41 10,44	8 0 39,0	41 17,66	20 41 14,05
8	5 0	16,7 41,1	+ 0,40	20	8 0 38,1	41 15,81	8 0 40,9	41 21,44	20 41 18,62
		17,1 41,6		200	5 1 56,8	28 52,40	5 1 39,3	28 17,74	200 28 35,07
9	20	16,0 40,4	+ 3,06	200	5 1 57,8	28 54,39	5 1 40,3	28 19,73	200 28 37,06
		12,5 37,1		20	8 0 30,4	41 0,49	8 0 33,8	41 7,31	20 41 3,90
10	30	13,5 38,1	— 2,29	20	8 0 30,6	41 0,88	8 0 32,8	41 5,31	20 41 3,09
		10,9 35,6		200	5 1 55,5	28 49,81	5 1 37,4	28 13,95	200 28 31,88
11	— 4 30	26,1 48,8	— 8,01	40	7 1 0,5	37 0,38	7 1 2,2	37 3,86	40 37 2,12
		17,1 40,0		220	4 2 4,1	24 6,92	4 1 47,1	23 33,27	220 23 50,09
12	5 10	14,1 36,5	— 9,58	220	4 2 5,1	24 8,91	4 1 48,2	23 35,46	220 23 52,18
		24,9 47,0		40	7 0 54,4	36 48,24	7 0 57,5	36 54,50	40 36 51,37
13	— 4 50	8,4 33,1	— 5,94	60	8 0 29,2	40 58,10	8 0 30,2	41 0,14	60 40 59,12
		1,8 26,5		240	5 1 36,4	28 11,81	5 1 21,0	27 41,30	240 27 56,55
14	5 0	2,9 27,4	+ 3,51	240	5 1 36,3	28 11,61	5 1 20,4	27 40,10	240 27 55,85
		1,0 23,5		60	8 0 15,2	40 30,24	8 0 16,2	40 32,26	60 40 31,25
15	10	6,0 30,6	+ 5,22	60	8 0 13,7	40 27,26	8 0 14,3	40 28,48	60 40 27,87
		11,8 36,4		240	5 1 34,7	28 8,42	5 1 20,0	27 39,30	240 27 53,86
16	50	6,9 31,6	— 3,91	240	5 1 34,0	28 7,03	5 1 18,7	27 36,72	240 27 51,87
		11,2 36,0		60	8 0 9,3	40 18,50	8 0 10,4	40 20,71	60 40 19,60
17	— 4 10	20,2 32,7	+ 2,52	80	5 0 28,5	25 56,71	5 0 28,1	25 55,96	80 25 56,33
		18,0 40,5		260	2 1 38,3	13 15,59	2 1 25,1	12 49,46	260 13 2,52
18	20	18,3 40,7	+ 4,27	260	2 1 39,9	13 18,77	2 1 24,9	12 49,06	260 13 3,91
		13,5 36,0		80	5 0 22,0	25 43,77	5 0 22,1	25 44,01	80 25 43,89
19	30	13,5 36,2	+ 5,94	80	5 0 22,8	25 45,37	5 0 22,2	25 44,21	80 25 44,79
		20,1 42,8		260	2 1 40,2	13 19,37	2 1 25,2	12 49,66	260 13 4,51
20	40	19,7 42,1	+ 5,13	260	2 1 40,4	13 19,77	2 1 25,3	12 49,86	260 13 4,81
		13,9 36,5		80	5 0 21,1	25 41,98	5 0 21,1	25 42,02	80 25 42,00

Ibáñez.

ESTACIÓN DE MADRID. — OBJETO OCAÑA. 10, 11, 12 Y 13 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	p p	"	°	D V P	' "	D V P	' "	° ' "
21	4 50	13,5 36,1	+ 2,92	80	5 0 21,4	25 42,58	5 0 21,0	25 41,82	80 25 42,20
		16,7 39,4		260	2 1 37,0	13 13,00	2 1 22,1	12 43,49	260 12 58,24
22	— 4 20	29,5 49,0	—14,40	100	7 1 41,7	38 22,35	7 1 38,8	38 16,74	100 38 19,54
		13,5 33,0		280	5 0 5,8	25 11,54	4 2 18,7	24 36,19	280 24 53,86
23	30	0,5 20,0	—21,96	280	4 2 27,5	24 53,48	4 2 6,0	24 10,90	280 24 32,19
		24,9 44,4		100	7 1 34,4	38 7,83	7 1 32,5	38 4,20	100 38 6,01
24	40	11,3 30,9	+17,23	100	7 1 23,6	37 46,34	7 1 20,2	37 39,70	100 37 43,02
		30,4 50,1		280	5 0 27,8	25 55,31	5 0 10,0	25 19,91	280 25 37,61
25	5 0	18,9 38,8	— 4,63	280	5 0 15,4	25 30,64	4 2 26,6	24 51,92	280 25 11,28
		24,0 44,0		100	7 1 33,8	38 6,63	7 1 32,7	38 4,59	100 38 5,61
26	10	24,9 44,9	— 3,15	100	7 1 34,8	38 8,62	7 1 32,1	38 3,40	100 38 6,01
		21,4 41,4		280	5 0 17,6	25 35,02	4 2 29,8	24 58,30	280 25 16,66
27	— 4 20	20,6 40,8	— 5,98	120	7 0 24,8	35 49,34	7 0 23,2	35 46,20	120 35 47,77
		14,0 34,1		300	4 1 32,6	23 4 25	4 1 13,7	22 26,76	300 22 45,50
28	30	14,0 34,1	— 5,40	300	4 1 32,1	23 3,25	4 1 13,3	22 25,96	300 22 44,60
		20,0 40,1		120	7 0 24,7	35 49,15	7 0 22,2	35 44,21	120 35 46,68
29	40	19,8 40,2	— 4,59	120	7 0 24,8	35 49,34	7 0 22,6	35 45,00	120 35 47,17
		14,7 35,1		300	4 1 33,5	23 6,04	4 1 14,5	22 28,35	300 22 47,19
30	50	14,0 34,7	— 2,92	300	4 1 32,9	23 4,84	4 1 15,0	22 29,35	300 22 47,09
		17,3 37,9		120	7 0 22,5	35 44,77	7 0 20,5	35 40,82	120 35 42,79
31	5 0	18,0 38,8	— 4,27	120	7 0 22,2	35 44,17	7 0 21,0	35 41,82	120 35 42,99
		13,2 34,1		300	4 1 34,0	23 7,03	4 1 15,4	22 30,14	300 22 48,58
32	10	12,4 33,2	— 2,25	300	4 1 34,7	23 8,42	4 1 15,4	22 30,14	300 22 49,28
		14,9 35,7		120	7 0 18,6	35 37,01	7 0 18,3	35 36,44	120 35 36,72
33	20	15,3 36,3	— 3,87	120	7 0 18,5	35 36,81	7 0 17,8	35 35,45	120 35 36,13
		11,0 32,0		300	4 1 33,5	23 6,04	4 1 14,0	22 27,36	300 22 46,70
34	30	10,0 31,0	— 2,83	300	4 1 33,6	23 6,23	4 1 14,5	22 26,36	300 22 46,30
		13,1 34,2		120	7 0 15,0	35 29,85	7 0 14,4	35 28,67	120 35 29,26
35	40	15,0 36,3	+ 0,31	120	7 0 14,3	35 28,45	7 0 13,8	35 27,48	120 35 27,96
		15,3 36,7		300	4 1 41,2	23 21,36	4 1 21,1	22 41,49	300 23 1,42
36	50	13,0 34,5	— 0,22	300	4 1 41,9	23 22,75	4 1 21,7	22 42,69	300 23 2,72
		13,2 34,8		120	7 0 10,9	35 21,69	7 0 10,6	35 21,11	120 35 21,40
37	— 4 40	13,0 33,6	+ 1,21	140	5 1 16,9	27 33,01	5 1 14,1	27 27,56	140 27 30,28
		14,3 35,0		320	2 2 29,3	14 57,06	2 2 12,7	14 24,25	320 14 40,65
38	50	13,4 34,1	+ 3,37	320	2 2 29,6	14 57,66	2 2 12,2	14 23,25	320 14 40,45
		9,7 30,3		140	5 1 13,3	27 25,85	5 1 10,2	27 19,79	140 27 22,82
39	5 10	10,3 31,5	— 0,85	140	5 1 13,2	27 25,65	5 1 10,3	27 19,99	140 27 22,82
		9,3 30,6		320	2 2 26,0	14 50,50	2 2 8,8	14 16,48	320 14 33,49
40	20	9,2 30,5	— 1,98	320	2 2 25,9	14 50,30	2 2 8,6	14 16,08	320 14 33,19
		11,4 32,7		140	5 1 11,3	27 21,87	5 1 9,7	27 18,79	140 27 20,33

Ibáñez.

ESTACIÓN DE MADRID.—OBJETO OCAÑA. 13, 14 Y 15 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	P P	″	°	D V P	′ ″	D V P	′ ″	° ′ ″
41	5 30	10,7 32,1	+ 1,48	140	5 1 11,9	27 23,06	5 1 10,7	27 20,78	140 27 21,92
		12,4 33,7		320	2 2 30,9	15 0,25	2 2 13,3	14 25,44	320 14 42,84
42	40	12,4 33,7	+ 1,71	320	2 2 30,3	14 59,05	2 2 12,8	14 24,44	320 14 41,74
		10,4 31,9		140	5 1 11,1	27 21,47	5 1 10,4	27 20,19	140 27 20,83
43	50	13,1 34,7	— 4,59	140	5 1 11,6	27 22,46	5 1 10,2	27 19,79	140 27 21,12
		8,0 29,6		320	2 2 26,8	14 52,09	2 2 8,4	14 15,68	320 14 33,88
44	— 4 30	12,2 32,8	— 1,17	160	7 0 30,6	36 0,88	7 0 27,9	35 55,56	160 35 58,22
		10,9 31,5		340	4 1 40,7	23 20,36	4 1 22,2	22 43,68	340 23 2,02
45	40	10,4 31,0	— 2,07	340	4 1 40,7	23 20,36	4 1 22,1	22 43,49	340 23 1,92
		12,8 33,2		160	7 0 30,5	36 0,69	7 0 28,2	35 56,15	160 35 58,42
46	50	13,3 33,9	+ 4,14	160	7 0 30,7	36 1,08	7 0 27,7	35 55,16	160 35 58,12
		17,9 38,5		340	4 1 46,9	23 32,70	4 1 29,7	22 58,62	340 23 15,66
47	5 0	12,9 33,6	+ 0,76	340	4 1 43,0	23 24,94	4 1 25,1	22 49,46	340 23 7,20
		12,1 32,7		160	7 0 29,6	35 58,90	7 0 26,9	35 53,57	160 35 56,23
48	10	12,8 33,5	+ 2,65	160	7 0 29,9	35 59,49	7 0 26,8	35 53,37	160 35 56,43
		15,7 36,5		340	4 1 46,7	23 32,30	4 1 28,3	22 55,83	340 23 14,06
49	20	14,1 35,0	+ 3,69	340	4 1 46,1	23 31,11	4 1 27,8	22 54,84	340 23 12,97
		10,0 30,9		160	7 0 27,1	35 53,92	7 0 23,8	35 47,39	160 35 50,65
50	30	10,0 31,0	+ 5,31	160	7 0 27,7	35 55,11	7 0 23,6	35 46,99	160 35 51,05
		15,9 36,9		340	4 1 47,9	23 34,69	4 1 30,5	23 0,21	340 23 17,45
51	40	15,4 36,3	+ 3,51	340	4 1 47,5	23 33,89	4 1 30,0	22 59,22	340 23 16,55
		11,4 32,5		160	7 0 28,3	35 56,31	7 0 25,3	35 50,38	160 35 53,34
52	50	12,0 33,3	+ 7,02	160	7 0 28,6	35 56,91	7 0 25,3	35 50,38	160 35 53,64
		19,9 41,0		340	4 1 52,8	23 44,44	4 1 34,3	23 7,78	340 23 26,11
53	— 4 20	17,6 34,7	— 2,02	180	7 0 35,0	36 9,64	7 0 29,2	35 58,15	180 36 3,89
		15,4 32,4		0	4 1 41,9	23 22,75	4 1 25,5	22 50,26	0 23 6,50
54	30	14,9 31,9	+ 10,71	0	4 1 42,8	23 24,54	4 1 25,4	22 50,06	0 23 7,30
		3,0 20,0		180	7 0 18,3	35 36,41	7 0 14,3	35 28,48	180 35 32,44
55	40	2,9 19,9	+ 11,79	180	7 0 18,6	35 37,01	7 0 13,2	35 26,29	180 35 31,65
		16,0 33,0		0	4 1 44,1	23 27,13	4 1 26,0	22 51,25	0 23 9,19
56	50	10,2 27,4	— 14,40	0	4 1 39,5	23 17,98	4 1 20,1	22 39,50	0 22 58,74
		26,2 43,4		180	7 0 43,0	36 25,56	7 0 35,8	36 11,29	180 36 18,42
57	5 0	22,3 39,6	— 10,30	180	7 0 39,1	36 17,80	7 0 29,8	35 59,34	180 36 8,57
		10,9 28,1		0	4 1 41,6	23 22,15	4 1 21,7	22 42,69	0 23 2,42
58	10	11,0 28,5	— 10,84	0	4 1 42,2	23 23,35	4 1 21,0	22 41,30	0 23 2,32
		23,1 40,5		180	7 0 37,5	36 14,61	7 0 34,1	36 7,90	180 36 11,25
59	20	22,7 40,6	— 8,14	180	7 0 35,7	36 11,03	7 0 32,3	36 4,32	180 36 7,67
		13,5 31,7		0	4 1 43,6	23 26,13	4 1 22,8	22 44,88	0 23 5,50
60	30	10,6 29,1	— 7,56	0	4 1 41,7	23 22,35	4 1 21,4	22 42,09	0 23 2,22
		19,0 37,5		180	7 0 33,1	36 5,86	7 0 31,1	36 1,93	180 36 3,89

Ibáñez.

ESTACIÓN DE MADRID. — OBJETO OCAÑA. 15, 16 Y 17 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	p p	″	°	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
61	5 40	19,5 38,3	— 10,12	180	7 0 33,6	36 6,85	7 0 31,1	36 1,93	180 36 4,39
		8,2 27,1		0	4 1 40,1	23 19,17	4 1 20,6	22 40,50	0 22 59,83
62	50	7,1 26,3	— 11,61	0	4 1 40,6	23 20,16	4 1 20,8	22 40,90	0 23 0,53
		20,0 39,2		180	7 0 31,9	36 3,47	7 0 28,9	35 57,55	180 36 0,51
63	— 4 30	15,9 32,6	0,00	200	5 2 28,6	29 55,67	5 2 22,6	29 43,96	200 29 49,81
		15,9 32,6		20	3 1 4,0	17 7,34	3 0 49,1	16 37,77	20 16 52,55
64	40	16,5 33,0	— 0,18	20	3 1 4,9	17 9,13	3 0 48,1	16 35,78	20 16 52,45
		16,8 33,1		200	6 0 0,3	30 0,60	5 2 22,7	29 44,16	200 29 52,38
65	50	17,7 34,1	+ 1,12	200	5 2 29,8	29 58,06	5 2 20,9	29 40,57	200 29 49,31
		18,9 35,4		20	3 1 6,5	17 12,32	3 0 50,3	16 40,16	20 16 56,24
66	5 0	18,0 34,6	+ 1,21	20	3 1 7,7	17 14,70	3 0 49,0	16 37,57	20 16 56,13
		16,6 33,3		200	5 2 30,1	29 58,65	5 2 21,1	29 40,97	200 29 49,81
67	10	17,0 33,7	0,00	200	6 0 0,3	30 0,60	5 2 20,9	29 40,57	200 29 50,58
		17,0 33,7		20	3 1 7,4	17 14,11	3 0 49,7	16 38,97	20 16 56,54
68	20	17,3 34,0	+ 1,21	20	3 1 8,2	17 15,70	3 0 49,6	16 38,77	20 16 57,23
		15,9 32,7		200	5 2 29,1	29 56,66	5 2 22,3	29 43,36	200 29 50,01
69	30	16,0 32,9	+ 0,99	200	5 2 28,2	29 54,87	5 2 20,9	29 40,57	200 29 47,72
		17,1 34,0		20	3 1 7,2	17 13,71	3 0 51,1	16 41,76	20 16 57,73
70	40	17,5 34,4	+ 1,53	20	3 1 9,4	17 18,09	3 0 51,3	16 42,15	20 17 0,12
		15,8 32,7		200	5 2 27,4	29 53,28	5 2 19,1	29 36,99	200 29 45,13
71	50	16,2 33,3	+ 1,57	200	5 2 28,1	29 54,67	5 2 18,7	29 36,19	200 29 45,43
		17,9 35,1		20	3 1 9,3	17 17,89	3 0 53,0	16 45,54	20 17 1,71
72	— 4 40	17,4 34,8	— 2,20	220	5 0 46,6	26 32,72	5 0 37,7	26 15,07	220 26 23,89
		15,0 32,3		40	2 1 48,2	13 35,29	2 1 30,2	12 59,62	40 13 17,45
73	5 10	15,1 32,9	— 0,49	40	2 1 50,6	13 40,06	2 1 32,1	13 3,40	40 13 21,73
		15,7 33,4		220	5 0 47,1	26 33,71	5 0 40,5	26 20,65	220 26 27,18
74	20	16,9 35,0	— 2,25	220	5 0 47,1	26 33,71	5 0 40,2	26 20,05	220 26 26,88
		14,4 32,5		40	2 1 58,3	13 55,38	2 1 40,3	13 19,73	40 13 37,55

Ibáñez.

ESTACIÓN DE OCAÑA.—OBJETO MADRID. 21 Y 22 DE FEBRERO; 5, 9 Y 10 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	P P	″	°	D V P	′ ″	D V P	′ ″	° ′ ″
1	3 50	51,0 19,4	+ 8,66	180	14 1 37,0	59 14,0	14 1 26,6	58 53,2	180 59 3,6
		43,5 11,7		0	5 1 53,6	23 47,2	5 1 40,3	23 20,6	0 23 33,9
2	4 0	45,2 13,5	— 5,24	0	5 1 53,0	23 46,0	5 1 41,1	23 22,2	0 23 34,1
		40,6 8,9		180	14 1 51,0	59 42,0	14 1 40,9	59 21,8	180 59 31,9
3	30	39,5 7,6	— 5,47	180	14 1 46,0	59 32,0	14 1 36,2	59 12,4	180 59 22,2
		44,3 12,4		0	5 1 54,4	23 48,8	5 1 41,7	23 23,4	0 23 36,1
4	40	45,1 13,1	+ 3,88	0	5 1 53,6	23 47,2	5 1 40,8	23 21,6	0 23 34,4
		48,5 16,5		180	14 1 36,0	59 42,0	14 1 25,0	58 50,0	180 59 1,0
5	50	48,4 16,3	+ 8,72	180	14 1 34,5	59 9,0	14 1 24,0	58 48,0	180 58 58,5
		40,7 8,7		0	6 0 1,9	24 3,8	5 1 49,4	23 38,8	0 23 51,3
6	— 4 40	47,0 16,8	+ 5,70	180	14 0 13,6	56 27,2	14 0 5,5	56 11,0	180 56 19,1
		42,0 11,8		0	5 0 23,1	20 46,2	5 0 13,5	20 27,0	0 20 36,6
7	50	45,0 14,6	+ 1,14	0	5 0 23,1	20 46,2	5 0 13,7	20 27,4	0 20 36,8
		46,0 15,6		180	14 0 11,9	56 23,8	14 0 4,3	56 8,6	180 56 16,2
8	5 0	44,5 14,0	+ 5,41	180	14 0 12,2	56 24,4	14 0 4,0	56 8,0	180 56 16,2
		39,8 9,2		0	5 0 31,0	21 2,0	5 0 21,9	20 43,8	0 20 52,9
9	20	47,3 16,4	— 6,90	0	5 0 32,4	21 4,8	5 0 22,6	20 45,2	0 20 55,0
		41,2 10,4		180	14 0 3,8	56 7,6	13 1 56,8	55 53,6	180 56 0,6
10	30	37,9 7,1	— 0,63	180	14 0 2,5	56 5,0	13 1 54,3	55 48,6	180 55 56,8
		38,5 7,6		0	5 0 51,9	21 43,8	5 0 41,4	21 22,8	0 21 33,3
11	— 4 30	42,7 12,8	— 2,05	180	10 1 19,4	42 38,8	10 1 9,3	42 18,6	180 42 28,7
		44,5 14,6		0	1 1 33,1	7 6,2	1 1 25,1	6 50,2	0 6 58,2
12	5 10	51,6 21,5	— 7,30	0	1 1 25,9	6 51,8	1 1 18,1	6 36,2	0 6 44,0
		45,2 15,1		180	10 1 12,8	42 25,6	10 1 5,1	42 10,2	180 42 17,9
13	— 4 50	56,3 25,1	+ 20,46	180	14 0 36,2	57 12,4	14 0 30,0	57 0,0	180 57 6,2
		38,3 7,2		0	5 1 7,7	22 15,4	5 1 1,0	22 2,0	0 22 8,7
14	5 0	40,3 9,4	+ 13,96	0	5 1 7,2	22 14,4	5 1 1,1	22 2,2	0 22 8,3
		52,6 21,6		180	14 0 42,0	57 24,0	14 0 35,0	57 10,0	180 57 17,0
15	10	50,3 19,4	+ 12,14	180	14 0 41,6	57 23,2	14 0 36,4	57 12,8	180 57 18,0
		39,6 8,8		0	5 1 10,0	22 20,0	5 1 3,6	22 7,2	0 22 13,6
16	50	40,4 9,4	+ 11,91	0	5 1 17,5	22 35,0	5 1 13,0	22 26,0	0 22 30,5
		50,9 19,8		180	14 0 32,0	57 4,0	14 0 25,9	56 51,8	180 56 57,9
17	— 4 10	45,2 15,1	— 1,03	180	0 1 3,5	2 7,0	0 0 58,5	1 57,0	180 2 2,0
		46,1 16,0		359	6 1 5,0	26 10,0	6 0 55,8	25 51,6	359 26 0,8
18	20	49,6 19,5	— 7,81	359	6 1 5,5	26 11,0	6 0 56,0	25 52,0	359 26 1,5
		42,8 12,6		180	0 1 0,5	2 1,0	0 0 57,3	1 54,6	180 1 57,8
19	30	41,5 11,2	— 10,15	180	0 1 5,0	2 10,0	0 1 0,0	2 0,0	180 2 5,0
		50,4 20,1		359	6 1 3,2	26 6,4	6 0 54,2	25 48,4	359 25 57,4
20	40	45,4 15,3	+ 3,65	359	6 1 9,0	26 18,0	6 0 59,0	25 58,0	359 26 8,0
		48,6 18,5		180	0 0 56,0	1 52,0	0 0 52,0	1 44,0	180 1 48,0

Barraquer.

ESTACIÓN DE OCAÑA.—OBJETO MADRID. 10, 11, 12 Y 13 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	″ ″	″	°	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
21	4 50	47,9 17,9	+ 2,96	180	0 0 55,9	1 51,8	0 0 52,7	1 45,4	180 1 48,6
		45,3 15,3		359	6 1 9,0	26 18,0	6 0 59,0	25 58,0	359 26 8,0
	—								
22	4 20	43,5 16,2	— 6,38	180	3 1 9,9	14 19,8	3 0 56,3	13 52,6	180 14 6,2
		49,1 21,8		359	9 1 7,8	38 15,6	9 0 54,0	37 48,0	359 38 1,8
23	30	49,0 21,6	— 2,05	359	9 1 11,5	38 23,0	9 0 57,0	37 54,0	359 38 8,5
		47,2 19,8		180	3 1 4,2	14 8,4	3 0 51,2	13 42,4	180 13 55,4
24	40	43,5 16,0	+ 0,11	180	3 1 8,1	14 16,2	3 0 55,6	13 51,2	180 14 3,7
		43,4 15,9		359	9 1 15,8	38 31,6	9 1 2,0	38 4,0	359 38 17,8
25	5 0	52,4 24,4	— 5,13	359	9 1 9,7	38 19,4	9 0 54,8	37 49,6	359 38 4,5
		47,9 19,9		180	3 1 0,2	14 0,4	3 0 50,0	13 40,0	180 13 50,2
26	10	43,2 15,1	— 8,72	180	3 1 4,5	14 9,0	3 0 54,7	13 49,4	180 13 59,2
		50,9 22,7		359	9 1 9,5	38 19,0	9 0 58,3	37 56,6	359 38 7,8
	—								
27	4 20	43,4 15,0	— 3,88	180	11 1 35,0	47 10,0	11 1 26,0	46 52,0	180 47 1,0
		46,8 18,4		0	2 1 29,0	10 58,0	2 1 20,0	10 40,0	0 10 49,0
28	30	52,8 24,3	— 11,11	0	2 1 24,0	10 48,0	2 1 14,2	10 28,4	0 10 38,2
		43,0 14,6		180	11 1 34,7	47 9,4	11 1 24,8	46 49,6	180 46 59,5
29	40	44,0 15,6	— 11,68	180	11 1 32,7	47 5,4	11 1 23,0	46 46,0	180 46 55,7
		54,3 25,8		0	2 1 24,5	10 49,0	2 1 16,1	10 32,2	0 10 40,6
30	50	53,9 25,2	— 10,09	0	2 1 24,8	10 49,6	2 1 15,7	10 31,4	0 10 40,5
		45,0 16,4		180	11 1 29,3	46 58,6	11 1 21,0	46 42,0	180 46 50,3
31	5 0	42,5 14,0	— 13,79	180	11 1 30,4	47 0,8	11 1 23,0	46 46,0	180 46 53,4
		54,7 26,0		0	2 1 24,5	10 49,0	2 1 16,5	10 33,0	0 10 41,0
32	10	48,5 19,7	— 3,88	0	2 1 35,9	11 11,8	2 1 26,6	10 53,2	0 11 2,5
		45,1 16,3		180	11 1 26,1	46 52,2	11 1 20,2	46 40,4	180 46 46,3
33	20	41,6 12,9	— 15,39	180	11 1 26,5	46 53,0	11 1 20,8	46 41,6	180 46 47,3
		55,2 26,3		0	2 1 27,6	10 55,2	2 1 20,8	10 41,6	0 10 48,4
34	30	57,0 28,0	— 13,57	0	2 1 29,2	10 58,4	2 1 21,0	10 42,0	0 10 50,2
		45,1 16,1		180	11 1 19,2	46 38,4	11 1 14,1	46 28,0	180 46 33,3
35	40	36,9 8,0	— 13,68	180	11 1 26,7	46 53,4	11 1 20,9	46 41,8	180 46 47,6
		49,0 19,9		0	2 1 42,1	11 24,2	2 1 34,6	11 9,2	0 11 16,7
36	50	50,5 21,3	— 12,60	0	2 1 44,3	11 28,6	2 1 37,0	11 14,0	0 11 21,3
		39,5 10,2		180	11 1 18,7	46 37,4	11 1 13,5	46 27,0	180 46 32,2
	—								
37	4 40	45,0 17,0	+ 5,02	180	6 1 59,0	27 58,0	6 1 45,6	27 31,2	180 27 44,6
		40,6 12,6		359	13 0 4,7	52 9,4	12 1 56,1	51 52,2	359 52 0,8
38	50	43,9 15,8	+ 1,54	359	13 0 3,0	52 6,0	12 1 54,4	51 48,8	359 51 57,4
		45,3 17,1		180	6 1 59,3	27 58,6	6 1 47,9	27 35,8	180 27 47,2
39	5 10	41,2 12,6	+ 1,77	180	6 1 59,5	27 59,0	6 1 48,9	27 37,8	180 27 48,4
		39,7 11,0		359	13 0 9,0	52 18,0	13 0 2,6	52 5,2	359 52 11,6
40	20	44,9 16,0	— 4,16	359	13 0 6,3	52 12,6	12 1 58,7	51 57,4	359 52 5,0
		41,3 12,3		180	6 1 56,2	27 52,4	6 1 48,8	27 37,6	180 27 45,0

ESTACIÓN DE OCAÑA.—OBJETO MADRID. 13, 14 Y 15 DE MARZO DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	r r	″	°	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
41	5 30	39,5 10,4 40,0 11,0	— 0,63	180 359	6 1 55,9 13 0 13,2	27 51,8 52 26,4	6 1 47,0 13 0 7,8	27 34,0 52 15,6	180 27 42,9 359 52 21,0
42	40	43,5 14,1 47,1 17,9	+ 4,22	359 180	13 0 14,2 6 1 40,4	52 28,4 27 20,8	13 0 8,1 6 1 34,5	52 16,2 27 9,0	359 52 22,3 180 27 14,9
43	50	47,9 18,5 50,2 20,7	— 2,56	180 359	6 1 38,0 13 0 8,1	27 16,0 52 16,2	6 1 33,0 13 0 2,5	27 6,0 52 5,0	180 27 11,0 359 52 10,6
44	— 4 30	43,4 15,6 44,6 17,0	— 1,48	180 0	14 1 21,8 5 1 10,0	58 43,6 22 20,0	14 1 10,0 5 1 1,1	58 20,0 22 2,2	180 58 31,8 0 22 11,1
45	40	47,9 20,1 43,9 16,0	— 4,62	0 180	5 1 11,5 14 1 22,5	22 23,0 58 45,0	5 1 2,0 14 1 10,9	22 4,0 58 21,8	0 22 13,5 180 58 33,4
46	50	43,6 15,7 44,9 17,0	— 1,48	180 0	14 1 19,0 5 1 13,9	58 38,0 22 27,8	14 1 8,2 5 1 4,9	58 16,4 22 9,8	180 58 27,2 0 22 18,8
47	5 0	49,7 21,6 42,0 14,0	— 8,72	0 180	5 1 12,5 14 1 16,8	22 25,0 58 33,6	5 1 3,5 14 1 7,0	22 7,0 58 14,0	0 22 16,0 180 58 23,8
48	10	41,6 13,5 52,4 24,1	— 12,20	180 0	14 1 17,5 5 1 10,1	58 35,0 22 20,2	14 1 6,5 5 1 1,0	58 13,0 22 2,0	180 58 24,0 0 22 11,1
49	20	46,7 18,3 42,5 14,1	— 4,79	0 180	5 1 18,5 14 1 13,1	22 37,0 58 26,2	5 1 9,3 14 1 4,2	22 18,6 58 8,4	0 22 27,8 180 58 17,3
50	30	40,3 11,7 53,0 24,2	— 14,36	180 0	14 1 13,0 5 1 12,0	58 26,0 22 24,0	14 1 4,1 5 1 4,6	58 8,2 22 9,2	180 58 17,1 0 22 16,6
51	40	55,3 26,4 42,4 13,6	— 14,65	0 180	5 1 13,0 14 1 6,2	22 26,0 58 12,4	5 1 5,0 14 1 0,0	22 10,0 58 0,0	0 22 18,0 180 58 6,2
52	50	33,1 4,2 43,4 14,4	— 11,68	180 0	14 1 15,4 5 1 31,1	58 30,8 23 2,2	14 1 8,1 5 1 24,0	58 16,2 22 48,0	180 58 23,5 0 22 55,1
53	— 4 20	43,9 17,9 44,9 18,8	— 1,08	180 359	3 0 47,0 9 0 42,5	13 34,0 37 25,0	3 0 29,0 9 0 30,0	12 58,0 37 0,0	180 13 16,0 359 37 12,5
54	30	46,1 19,7 43,9 17,5	— 2,51	359 180	9 0 40,7 3 0 49,2	37 21,4 13 38,4	9 0 26,5 3 0 32,5	36 53,0 13 5,0	359 37 7,2 180 13 21,7
55	40	40,5 14,1 48,9 22,3	— 9,46	180 359	3 0 48,2 9 0 38,5	13 36,4 37 17,0	3 0 32,9 9 0 26,0	13 5,8 36 52,0	180 13 21,1 359 37 4,5
56	50	48,5 21,8 43,4 16,7	— 5,81	359 180	9 0 39,2 3 0 46,5	37 18,4 13 33,0	9 0 26,0 3 0 29,9	36 52,0 12 59,8	359 37 5,2 180 13 16,4
57	5 0	39,1 12,5 45,9 19,2	— 7,69	180 359	3 0 49,7 9 0 43,4	13 39,4 37 26,8	3 0 33,1 9 0 31,5	13 6,2 37 3,0	180 13 22,8 359 37 14,9
58	10	51,2 24,2 43,5 16,5	— 8,78	359 180	9 0 39,2 3 0 42,2	37 18,4 13 24,4	9 0 26,5 3 0 27,9	36 53,0 12 55,8	359 37 5,7 180 13 10,1
59	20	39,9 13,0 45,6 18,6	— 6,44	180 359	3 0 44,0 9 0 47,2	13 28,0 37 34,4	3 0 29,1 9 0 36,7	12 58,2 37 13,4	180 13 13,1 359 37 23,9
60	30	47,7 20,6 43,4 16,2	— 4,96	359 180	9 0 48,0 3 0 37,1	37 36,0 13 14,2	9 0 36,8 3 0 23,2	37 13,6 12 46,4	359 37 24,8 180 13 0,3

Barraquer.

ESTACIÓN DE OCAÑA.—OBJETO MADRID. 15, 16 Y 17 DE MARZO DE 1 864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	r r	"	°	D V r	' "	D V r	' "	° ' "
61	5 40	40,1 12,7	— 11,46	180	3 0 38,3	13 16,6	3 0 25,1	12 50,2	180 13 3,4
		50,2 22,7		359	9 0 47,0	37 34,0	9 0 35,9	37 11,8	359 37 22,9
62	50	47,4 19,7	— 3,99	359	9 0 54,0	37 48,0	9 0 42,9	37 25,8	359 37 36,9
		43,9 16,2		180	3 0 25,6	12 51,2	3 0 13,0	12 26,0	180 12 38,6
63	4 30	43,5 17,5	— 1,14	180	4 1 18,9	18 37,8	4 1 0,6	18 1,2	180 18 19,5
		44,5 18,5		359	10 1 11,5	42 23,0	10 0 57,6	41 55,2	359 42 9,1
64	40	49,4 23,3	— 5,76	359	10 1 9,0	42 18,0	10 0 55,0	41 50,0	359 42 4,0
		44,3 18,3		180	4 1 20,2	18 40,4	4 1 4,9	18 9,8	180 18 25,1
65	50	44,6 18,5	— 1,77	180	4 1 18,0	18 36,0	4 1 2,1	18 4,2	180 18 20,1
		46,1 20,1		359	10 1 13,5	42 27,0	10 1 0,1	42 0,2	359 42 13,6
66	5 0	47,5 21,3	— 3,02	359	10 1 13,6	42 27,2	10 1 0,0	42 0,0	359 42 13,6
		44,8 18,7		180	4 1 17,5	18 35,0	4 1 1,0	18 2,0	180 18 18,5
67	10	41,4 15,3	— 7,24	180	4 1 17,0	18 34,0	4 1 0,0	18 0,0	180 18 17,0
		47,8 21,6		359	10 1 15,1	42 30,2	10 1 3,7	42 7,4	359 42 18,8
68	20	48,7 22,3	— 4,96	359	10 1 15,3	42 30,6	10 1 3,7	42 7,4	359 42 19,0
		44,3 18,0		180	4 1 12,5	18 25,0	4 0 57,0	17 54,0	180 18 9,5
69	30	45,2 18,5	— 2,11	180	4 1 8,5	18 17,0	4 0 52,0	17 44,0	180 18 0,5
		47,1 20,3		359	10 1 20,0	42 40,0	10 1 9,0	42 18,0	359 42 29,0
70	40	49,6 22,7	— 8,32	359	10 1 21,0	42 42,0	10 1 10,5	42 21,0	359 42 31,5
		42,3 15,4		180	4 1 6,0	18 12,0	4 0 51,0	17 42,0	180 17 57,0
71	50	41,6 14,6	— 10,94	180	4 0 58,4	17 46,8	4 0 43,1	17 26,2	180 17 41,5
		51,3 24,1		359	10 1 28,1	42 56,2	10 1 17,5	42 35,0	359 42 45,6
72	4 40	43,5 18,2	0,00	180	1 0 16,3	4 32,6	0 1 56,9	3 53,8	180 4 13,2
		43,5 18,2		359	7 0 16,1	28 32,2	7 0 3,0	28 6,0	359 28 19,1
73	5 10	47,6 21,1	— 0,34	359	7 0 20,1	28 40,2	7 0 5,7	28 11,4	359 28 25,8
		47,3 20,8		180	1 0 4,6	4 9,2	0 1 46,2	3 32,4	180 3 50,8
74	20	41,9 15,3	— 1,82	180	1 0 5,3	4 10,6	0 1 47,5	3 35,0	180 3 52,8
		43,5 16,9		359	7 0 28,0	28 56,9	7 0 16,2	28 32,4	359 28 44,2

Barraquer.

OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS.

ESTACIÓN DE MADRID (*). FEBRERO Y MARZO DE 1864.

N.º	Días	Horas	Barómetro N.º 2. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0º	Termómetro N.º 123.	N.º	Días	Horas	Barómetro N.º 2. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0º	Termómetro N.º 123.
		h m	mm	º	mm	º			h m	mm	º	mm	º
1	21	3 50	692,40	4,8	692,76 (**)	5,4	38	13	4 50	709,80	11,3	709,40	12,6
2		4 0	692,50	5,2	692,81	6,2	39		5 10	709,80	11,2	709,41	13,0
3		30	692,60	5,3	692,90	5,7	40		20	709,90	11,2	709,51	12,5
4		40	692,65	5,2	692,96	5,2	41		30	709,80	11,1	709,42	12,4
5		50	692,70	5,1	693,04	3,3	42		40	709,90	10,9	709,54	12,2
6	22	4 40	695,10	6,9	695,22	7,2	43		50	709,90	10,9	709,54	12,2
7		50	695,10	7,0	695,21	7,0	44	14	4 30	707,80	11,4	707,40	13,4
8		5 0	695,10	6,7	695,24	6,7	45		40	707,70	11,4	707,30	12,9
9		20	695,20	6,4	695,37	6,6	46		50	707,70	11,5	707,28	13,4
10		30	695,30	6,3	695,49	6,6	47		5 0	707,60	11,6	707,17	12,8
11	5	4 30	691,65	10,5	691,37	11,8	48		10	707,70	11,6	707,27	13,0
12		5 10	692,10	10,8	691,79	11,8	49		20	707,70	11,5	707,28	12,7
13	9	4 50	695,70	8,5	695,64	8,0	50		30	707,70	11,4	707,30	12,6
14		5 0	695,60	8,6	695,53	7,8	51		40	707,70	11,3	707,31	12,7
15		10	695,80	8,5	695,74	7,7	52		50	707,70	10,9	707,35	12,0
16		50	696,50	8,5	696,44	7,2	53	15	4 20	704,00	12,9	703,43	16,1
17	10	4 10	704,50	9,7	704,29	10,6	54		30	704,00	13,1	703,40	15,7
18		20	704,50	9,7	704,29	10,1	55		40	704,10	13,3	703,48	15,7
19		30	704,60	9,8	704,38	10,1	56		50	704,10	13,3	703,48	15,7
20		40	704,90	10,0	704,65	10,1	57		5 0	704,10	13,4	703,47	15,3
21		50	704,80	10,2	704,53	9,6	58		10	704,10	14,4	703,36	15,2
22	11	4 20	709,50	10,1	709,24	12,4	59		20	704,00	13,2	703,39	15,0
23		30	709,60	10,3	709,31	13,0	60		30	704,10	13,2	703,49	14,4
24		40	709,60	10,3	709,31	12,8	61		40	704,20	13,1	703,60	14,3
25		5 0	709,60	10,1	709,34	12,2	62		50	704,10	13,0	703,51	15,0
26		10	709,70	10,1	709,44	12,8	63	16	4 30	702,00	15,7	701,12	17,8
27	12	4 20	709,60	12,1	709,11	13,5	64		40	702,00	15,7	701,12	18,6
28		30	709,50	12,1	709,01	13,8	65		50	702,00	15,6	701,13	18,0
29		40	709,50	12,3	708,98	13,7	66		5 0	702,00	15,5	701,14	17,7
30		50	709,50	12,3	708,98	13,6	67		10	702,10	15,5	701,24	18,1
31		5 0	709,60	12,3	709,08	13,4	68		20	702,10	15,3	701,27	17,7
32		10	709,50	12,2	709,00	13,3	69		30	702,10	15,3	701,27	18,1
33		20	709,60	12,2	709,10	13,3	70		40	702,20	15,3	701,37	17,5
34		30	709,50	12,2	709,00	13,0	71		50	702,10	15,2	701,28	16,7
35		40	709,60	12,1	709,11	12,8	72	17	4 40	699,40	16,1	698,48	18,0
36		50	709,70	11,9	709,23	12,0	73		5 10	699,50	16,0	698,59	16,7
37	13	4 40	709,80	11,2	709,41	13,4	74		20	699,40	15,9	698,50	16,2

(*) Se observaba simultáneamente en la Estación de Ocaña.
(**) Las observaciones hechas con el barómetro N.º 2 han sufrido la corrección + 0mm,89, obtenida en la comparación con el barómetro N.º 8, situado en la Estación de Ocaña.

Estación de Ocaña (*). **Febrero y marzo de 1864.**

N.º	Días	Horas.	Barómetro N.º 8. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0º	Termómetro N.º 109.	N.º	Días	Horas.	Barómetro N.º 8. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0º	Termómetro N.º 109.
		h m	mm	º	mm	º			h m	mm	º	mm	º
1	21	3 50	685,65	1,5	685,49	1,5	38	13	4 50	703,00	10,1	701,86	10,9
2		4 0	685,65	1,6	685,47	1,6	39		5 10	703,05	9,7	701,96	10,7
3		30	685,75	1,6	685,57	1,3	40		20	703,05	9,5	701,98	10,6
4		40	685,80	1,5	685,64	1,3	41		30	703,10	9,3	702,05	10,4
5		50	685,85	1,4	685,70	1,2	42		40	703,15	9,1	702,12	10,3
6	22	4 40	688,60	6,0	687,93	5,5	43		50	703,15	8,9	702,15	10,0
7		50	688,45	5,9	687,79	5,4	44	14	4 30	701,30	10,5	700,12	11,3
8		5 0	688,50	5,9	687,84	5,3	45		40	701,20	10,2	700,05	11,2
9		20	688,60	5,5	687,99	4,9	46		50	701,20	10,1	700,06	11,1
10		30	688,55	5,3	687,96	4,8	47		5 0	701,25	10,0	700,12	11,0
11	5	4 30	685,70	9,3	684,67	10,3	48		10	701,25	9,9	700,13	11,0
12		5 10	686,25	8,8	685,28	9,9	49		20	701,25	9,8	700,15	10,8
13	9	4 50	689,75	7,1	688,96	6,3	50		30	701,25	9,6	700,17	10,7
14		5 0	689,80	7,2	689,00	6,5	51		40	701,15	9,5	700,08	10,5
15		10	689,95	7,1	689,16	6,7	52		50	701,15	9,2	700,11	10,2
16		50	690,30	6,4	689,59	6,0	53	15	4 20	697,80	13,1	696,33	14,2
17	10	4 10	698,15	8,9	697,15	8,1	54		30	697,75	13,1	696,28	14,1
18		20	698,20	8,6	697,23	7,7	55		40	697,75	13,1	696,28	14,4
19		30	698,20	8,6	697,23	7,9	56		50	697,70	13,0	696,25	13,9
20		40	698,35	8,7	697,37	7,9	57		5 0	697,70	12,9	696,26	14,0
21		50	698,40	8,7	697,42	8,1	58		10	697,70	12,7	696,28	13,6
22	11	4 20	702,85	9,8	701,75	10,9	59		20	697,70	12,6	696,29	13,4
23		30	702,90	9,8	701,80	11,0	60		30	697,70	12,4	696,31	13,3
24		40	702,85	9,8	701,75	10,8	61		40	697,65	12,1	696,30	13,2
25		5 0	702,85	9,4	701,79	10,2	62		50	697,65	11,9	696,32	12,9
26		10	702,80	9,3	701,75	10,1	63	16	4 30	695,70	17,4	693,75	18,2
27	12	4 20	702,85	11,6	701,54	12,7	64		40	695,60	17,3	693,66	18,1
28		30	702,80	11,6	701,49	12,2	65		50	695,60	17,2	693,68	18,1
29		40	702,85	11,2	701,59	12,2	66		5 0	695,65	17,0	693,75	17,8
30		50	702,85	11,2	701,59	12,3	67		10	695,65	16,8	693,77	17,3
31		5 0	702,75	11,1	701,50	12,2	68		20	695,60	16,5	693,75	16,7
32		10	702,80	11,1	701,55	12,1	69		30	695,65	16,0	693,86	16,3
33		20	702,85	11,1	701,60	12,0	70		40	695,60	15,9	693,82	16,2
34		30	703,00	10,8	701,78	11,7	71		50	695,55	15,6	693,80	15,9
35		40	703,00	10,5	701,82	11,5	72	17	4 40	693,30	17,5	691,36	17,8
36		50	703,05	10,2	701,90	11,2	73		5 10	693,30	16,4	691,48	17,0
37	13	4 40	703,05	10,2	701,90	11,2	74		20	693,30	16,2	691,50	16,7

(*) Se observaba simultáneamente en la Estación de Madrid.

Con estos datos se calculó por la fórmula (1) la diferencia de nivel d entre Ocaña y Madrid; por la (2) el error probable e de una determinación, y los valores del coeficiente de refracción K, por su expresión en función del lado l, de las distancias cenitales z', z'', y del radio de la Tierra R',

$$K = 1 - (z' + z'' - 180^\circ)\frac{R'}{l r''}, \tag{47}$$

en la cual r'' representa el número de segundos comprendidos en el arco igual al radio.

Como podrá verse en los dos *Estados* siguientes, que comprenden estos cálculos, las variaciones de la refracción en Ocaña son mucho más rápidas que en Madrid, lo que debe atribuirse á que la trayectoria pasa rasante al terreno en la proximidad de aquella Estación. Por esta causa no hubiera debido introducirse en el cálculo más que las observaciones hechas antes de que comenzase el rápido aumento de la refracción, si el objeto hubiese sido determinar con la mayor aproximación el desnivel; pero siendo este trabajo de estudio, no se ha desechado observación alguna, entrando todas en la formación del error probable, que por este motivo aparece bastante crecido. Desechando de las últimas observaciones de cada día las 14 en que la indicada causa de error se manifiesta con más evidencia, y verificando el cálculo con las 60 restantes, se reduciría el error probable á $\pm 0^m,54$.

CÁLCULO DE LA DIFERENCIA DE NIVEL.

N.°	Días.	Horas.	z' MADRID.	z'' OCAÑA.	$z''-z'$	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$z'+z''-180°$	K
		h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	° ′ ″	
1	21	3 50	90 6 11,38	90 17 53,51	0 11 42,13	0 5 51,06	— 8,56	0 23 64,89	0,14635
2	feb.°	4 0	20,37	53,66	33,29	46,64	— 4,14	74,03	0,14095
3		30	19,66	47,58	27,92	43,96	— 1,46	67,24	0,14496
4		40	23,42	47,18	23,76	41,88	+ 0,62	70,60	0,14297
5		50	12,99	42,32	29,33	44,66	— 2,16	55,31	0,15201
6	22	4 40	24,54	56,95	32,41	46,20	— 3,70	81,49	0,13654
7		50	25,51	50,84	25,33	42,66	— 0,16	76,35	0,13958
8		5 0	22,17	47,06	24,89	42,44	+ 0,06	69,23	0,14378
9		20	16,48	25,90	9,42	34,71	+ 7,79	42,38	0,15965
10		30	13,31	11,12	10 57,81	28,90	+ 13,60	24,43	0,17025
11	5	4 30	28,00	43,20	11 15,20	37,60	+ 4,90	71,20	0,14262
12	marzo.	5 10	20,01	39,65	19,64	39,82	+ 2,68	59,66	0,14944
13	9	4 50	25,34	49,21	23,87	41,93	+ 0,57	74,55	0,14064
14		5 0	21,21	48,31	27,10	43,55	— 1,05	69,52	0,14361
15		10	22,22	44,34	22,12	41,06	+ 1,44	66,56	0,14536
16		50	9,95	25,61	15,66	37,83	+ 4,67	35,56	0,16368
17	10	4 10	29,42	59,57	30,15	45,07	— 2,57	88,99	0,13211
18		20	24,26	50,34	26,08	43,04	— 0,54	74,60	0,14061
19		30	26,08	53,65	27,57	43,78	— 1,28	79,73	0,13758
20		40	23,72	53,65	29,93	44,96	— 2,46	77,37	0,13898
21		50	24,90	53,26	28,36	44,18	— 1,68	78,16	0,13851
22	11	4 20	28,44	55,82	27,38	43,69	— 1,19	84,26	0,13491
23		30	24,95	51,40	26,45	43,22	— 0,72	76,35	0,13958
24		40	19,93	53,06	33,13	46,56	— 4,06	72,99	0,14156
25		5 0	22,53	47,72	25,19	42,59	— 0,09	70,25	0,14318
26		10	21,52	46,98	25,46	42,73	— 0,23	68,50	0,14422
27	12	4 20	25,15	62,12	36,97	48,48	— 5,98	87,27	0,13313
28		30	25,64	59,54	33,90	46,95	— 4,45	85,18	0,13436
29		40	25,40	55,87	30,47	45,23	— 2,73	81,27	0,13667
30		50	24,93	54,81	29,88	44,94	— 2,44	79,74	0,13758
31		5 0	22,93	52,41	29,48	44,74	— 2,24	76,34	0,14018
32		10	21,47	48,02	26,55	43,27	— 0,77	69,49	0,14363
33		20	20,84	44,06	23,22	41,61	+ 0,89	64,90	0,14635
34		30	18,65	37,98	19,33	39,66	+ 2,84	56,63	0,15123
35		40	13,58	31,77	18,19	39,09	+ 3,41	45,35	0,15790
36		50	9,12	22,85	13,73	36,86	+ 5,64	31,97	0,16580
37	13	4 40	26,02	56,92	30,90	45,45	— 2,95	82,94	0,13569
38		50	24,55	56,44	31,89	45,94	— 3,44	80,99	0,13684
39		5 10	23,81	50,17	26,36	43,18	— 0,68	73,98	0,14088
40		20	21,59	45,84	24,25	42,12	+ 0,38	67,43	0,14485

N.º	Días.	Horas.	z' MADRID.	z'' OCAÑA.	$z''-z'$	$\frac{1}{2}(z''-z')$	DIFERENCIAS CON EL PROMEDIO.	$z'+z''-180^\circ$	K
		h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	° ′ ″	
41	13	5 30	90 6 21,02	90 17 40,32	0 11 19,30	0 5 39,65	+ 2,85	0 23 61,34	0,14845
42	marzo	40	21,25	30,52	9,27	34,63	+ 7,87	51,77	0,15410
43		50	19,03	27,64	8,61	34,30	+ 8,20	46,67	0,15712
44	14	4 30	26,93	68,87	41,94	50,97	− 8,47	95,80	0,12809
45		40	26,18	65,33	39,15	49,57	− 7,07	91,51	0,13063
46		50	25,37	62,72	37,35	48,67	− 6,17	88,09	0,13265
47		5 0	25,27	55,18	29,91	44,95	− 2,45	80,45	0,13716
48		10	23,83	54,25	30,42	45,21	− 2,71	78,08	0,13856
49		20	22,53	49,96	27,43	43,71	− 1,21	72,49	0,14186
50		30	22,11	45,89	23,78	41,89	+ 0,61	68,00	0,14452
51		40	21,90	39,45	17,55	38,77	+ 3,73	61,35	0,14844
52		50	20,78	32,52	11,74	35,87	+ 6,63	53,30	0,15320
53	15	4 20	26,67	60,67	34,00	47,00	− 4,50	87,34	0,13309
54		30	23,28	64,74	41,46	50,73	− 8,23	88,02	0,13269
55		40	23,02	58,84	35,82	47,91	− 5,41	81,86	0,13632
56		50	25,44	59,79	34,35	47,17	− 4,67	85,23	0,13433
57		5 0	22,77	56,26	33,49	46,74	− 4,24	79,03	0,13800
58		10	23,62	53,42	29,80	44,90	− 2,40	77,04	0,13917
59		20	22,94	48,16	25,22	42,61	− 0,11	71,10	0,14268
60		30	23,27	42,79	19,52	39,76	+ 2,74	66,06	0,14566
61		40	22,16	38,79	16,63	38,31	+ 4,19	60,95	0,14868
62		50	18,38	26,86	8,48	34,24	+ 8,26	45,24	0,15796
63	16	4 30	28,63	64,06	35,43	47,71	− 5,21	92,69	0,12993
64		40	29,78	64,79	35,01	47,50	− 5,00	94,57	0,12882
65		50	27,65	61,48	33,83	46,91	− 4,41	89,13	0,13203
66		5 0	28,05	59,43	31,38	45,69	− 3,19	87,48	0,13291
67		10	27,02	51,86	24,84	42,42	+ 0,08	78,88	0,13809
68		20	27,60	50,29	22,69	41,34	+ 1,16	77,89	0,13867
69		30	25,98	43,64	17,66	38,83	+ 3,67	69,62	0,14356
70		40	24,03	34,43	10,40	35,20	+ 7,30	58,46	0,15015
71		50	23,43	17,01	10 53,58	26,79	+ 15,71	40,44	0,16080
72	17	4 40	31,02	57,05	11 26,03	43,01	− 0,51	88,07	0,13266
73		5 10	32,23	42,16	9,93	34,96	+ 7,54	74,39	0,14074
74		20	22,41	32,48	10,07	35,03	+ 7,47	54,89	0,15226
					Promedios...	0 5 42,50	3,72	0 23 71,00	0,14274

$$d = l \text{ tang.} \tfrac{1}{2}(z''-z') + e$$

$$l = 52266{,}244^{m} \ (*) \qquad e = \pm 0{,}833^{m}$$

$$d = 86{,}787^{m} \pm 0{,}833^{m}$$

(*) Este valor del lado MADRID-OCAÑA, reducido al nivel del mar, se ha calculado con las observaciones hechas en los vértices de la cadena geodésica del meridiano del Observatorio, y con el valor definitivo de la base de Madridejos. Las direcciones adoptadas no son todavía las más probables.

Terminada la primera serie de observaciones, regresó á Madrid el Sr. Barraquer, quedando en Ocaña los auxiliares encargados del heliotropo y de las lecturas barométricas y termométricas. Para la simultaneidad de éstas con las de Madrid, se establecieron dos señales heliotrópicas, preventiva una, y otra ejecutiva, las cuales precedían á cada distancia cenital observada en Madrid, contestando Ocaña á la preventiva: quedaba, por consiguiente, á elección del observador de Madrid el momento favorable para verificar las observaciones, así como el número de ellas que debían hacerse; y cuando deseaba suspender el trabajo, tanto por la mañana como por la tarde, mandaba hacer la señal correspondiente.

El primero de los dos *Estados* que siguen, contiene las observaciones de 18 distancias cenitales de Ocaña, cuyas trayectorias luminosas debían servir para calcular el desnivel por la Estación de Madrid. El segundo presenta las observaciones meteorológicas correspondientes, en ambas estaciones, resultando la variación de la temperatura de $13^{c},2$ en Madrid, y de $14^{c},0$ en Ocaña, y la de las presiones de $16^{mm},7$ y $17^{mm},1$.

OBSERVACIONES DE DISTANCIAS CENITALES.

ESTACIÓN DE MADRID. — OBJETO OCAÑA.

23 Á 25, 27 Á 31 DE MARZO; 1, 9, 10 Y 11 DE ABRIL DE 1864.

N.º	Horas.	Nivel.		Índice.	Microscopio A.		Microscopio B.		Promedios.
	h m	P P	"	°	D V P	' "	D V P	' "	° ' "
I	4 20	4,2 25,5	+11,47	0	5 2 12,5	29 23,64	5 2 10,2	29 19,27	0 29 21,45
	—	17,0 38,2		180	3 1 1,0	17 1,37	3 0 43,5	16 26,62	180 16 43,99
II	4 20	5,2 25,1	— 1,98	18	5 1 16,4	27 32,01	5 1 16,5	27 32,33	18 27 32,17
	—	3,0 22,9		198	2 2 30,1	14 58,65	2 2 7,3	14 13,49	198 14 36,07
III	4 40	10,5 32,9	+ 8,68	41	6 1 24,3	32 47,73	6 1 23,9	32 47,07	41 32 47,40
	—	20,2 42,5		221	4 0 8,7	20 17,31	3 2 22,4	19 43,56	221 20 0,43
IV	5 0	24,7 49,1	+ 0,40	62	0 2 5,4	4 9,51	0 2 5,6	4 10,11	62 4 9,81
	—	25,1 49,6		241	10 0 42,2	51 23,97	10 0 25,7	50 51,18	241 51 7,57
V	5 30	26,1 49,4	— 4,63	80	9 1 18,6	47 36,39	9 1 17,7	47 34,72	80 47 35,55
		21,4 43,8		260	6 2 20,6	34 39,75	6 2 7,3	34 13,49*	260 34 26,62
VI	21 10	22,7 47,0	— 9,85	100	10 1 31,2	53 1,46	10 1 31,9	53 3,00	100 53 2,23
	—	11,9 35,9		280	7 2 30,9	40 0,25	7 2 13,3	39 25,44	280 39 42,84
VII	4 50	29,1 50,3	—10,26	120	5 1 16,0	27 31,22	5 1 15,9	27 31,14	120 27 31,18
	—	17,6 39,0		300	2 2 9,8	14 18,26	2 1 51,0	13 41,03	300 13 59,64
VIII	5 0	19,5 39,4	+ 4,09	140	6 1 8,5	32 16,29	6 1 0,3	32 0,08	140 32 8,18
	—	24,1 43,9		320	3 2 14,5	19 27,61	3 1 59,3	18 57,56	320 19 12,58
IX	5 20	19,0 26,5	+16,60	180	5 0 12,3	25 24,47	5 0 7,7	25 15,33	180 25 19,90
		32,4 50,0		0	2 1 36,3	13 11,61	2 1 26,6	12 52,45	0 13 2,03
X	19 30	17,5 40,6	— 5,89	200	4 1 5,4	22 10,13	4 1 0,0	21 59,48	200 22 4,80
	—	11,0 34,0		20	3 0 55,9	16 51,22	3 0 43,3	16 26,22	20 16 38,72
XI	21 10	19,8 39,4	+ 2,88	220	5 1 51,4	28 41,65	5 1 44,3	28 27,69	220 28 34,67
	—	23,0 42,6		40	3 0 53,2	16 45,85	3 0 36,6	16 12,88	40 16 29,36
XII	4 50	31,5 49,3	—14,85	220	5 2 15,3	29 29,21	5 2 5,1	29 9,11	220 29 19,16
		15,0 32,8		40	3 0 26,4	15 52,53	3 0 9,0	15 17,92	40 15 35,22
XIII	5 50	10,0 29,0	+ 8,64	220	5 1 50,0	28 38,87	5 1 39,5	28 18,13	220 28 28,50
		19,6 38,6		40	3 0 34,1	16 7,85	3 0 18,0	15 35,84	40 15 51,84
XIV	20 50	2,8 23,1	+21,33	240	6 0 12,4	30 24,67	6 0 8,4	30 16,73	240 30 20,70
	—	26,5 46,8		60	3 1 48,0	18 34,89	3 1 29,0	17 57,23	60 18 16,06
XV	4 50	10,5 26,8	+13,77	260	5 2 4,3	29 7,32	5 1 56,3	28 51,59	260 28 59,45
		25,8 42,1		80	3 0 52,0	16 43,46	3 0 30,2	16 0,14	80 16 21,80
XVI	6 0	21,8 39,0	—16,11	260	5 2 16,1	29 30,80	5 2 9,3	29 17,48	260 29 24,14
	—	3,9 21,1		80	3 0 36,9	16 13,42	3 0 17,8	15 35,45	80 15 54,43
XVII	4 30	21,4 33,6	— 1,80	300	11 0 19,8	55 39,40	11 0 11,0	55 21,90	300 55 30,65
		19,2 31,8		120	8 1 23,5	42 46,14	8 1 0,2	41 59,88	120 42 23,01
XVIII	5 40	4,3 19,3	+10,30	300	11 0 4,9	55 9,75	10 2 24,9	54 48,54	300 54 59,14
		15,7 30,8		120	8 1 22,4	42 43,95	8 0 58,2	41 55,89	120 42 19,92

Ibáñez. Barraquer. Cabello.

OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS.

ESTACIÓN DE MADRID. MARZO Y ABRIL DE 1 864.

N.°	DÍAS.	HORAS.	BARÓMETRO N.° 2. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0°	TERMÓMETRO N.° 123.
		h m	mm	°	mm	°
I	23	4 20	693,90	10,4	693,63	12,9
II	24	4 20	699,10	12,6	698,57	14,8
III	25	4 40	700,80	11,1	700,44	13,3
IV	27	5 0	692,10	8,0	692,10	8,3
V	28	5 30	697,60	10,6	697,30	12,0
VI		21 10	698,40	8,6	698,32	7,9
VII	29	4 50	697,60	12,3	697,11	13,8
VIII	30	5 0	702,50	13,4	701,88	13,9
IX	31	5 20	705,90	13,9	705,21	15,7
X		19 30	708,30	9,7	708,08	8,2
XI	1	21 10	709,40	13,2	708,78	14,3
XII	9	4 50	702,00	16,7	701,01	16,5
XIII		5 50	701,70	16,0	700,79	15,9
XIV		20 50	702,50	11,9	702,05	11,4
XV	10	4 50	701,40	17,7	700,30	18,7
XVI		6 0	701,50	17,3	700,44	18,6
XVII	11	4 30	700,90	19,3	699,62	20,5
XVIII		5 40	700,80	19,2	699,53	21,1

ESTACIÓN DE OCAÑA. MARZO Y ABRIL DE 1 864.

N.°	DÍAS.	HORAS.	BARÓMETRO N.° 8. Altura observada.	Temperatura.	Presión á 0°	TERMÓMETRO N.° 109.
		h m	mm	°	mm	°
I	23	4 20	687,60	10,2	686,48	10,7
II	24	4 20	692,80	14,5	691,19	14,7
III	25	4 40	694,55	9,8	693,45	10,6
IV	27	5 0	685,65	6,7	684,91	5,7
V	28	5 30	691,50	9,9	690,40	10,7
VI		21 10	692,30	7,6	691,45	6,8
VII	29	4 50	691,80	12,3	690,43	12,8
VIII	30	5 0	695,90	13,1	694,43	13,6
IX	31	5 20	699,60	15,4	697,86	14,6
X		19 30	701,85	10,1	700,71	8,9
XI	1	21 10	703,65	14,9	701,97	15,1
XII	9	4 50	695,45	14,7	693,81	14,2
XIII		5 50	695,40	13,6	693,88	14,4
XIV		20 50	695,80	10,0	694,68	10,8
XV	10	4 50	695,45	18,7	693,36	17,8
XVI		6 0	695,30	16,8	693,42	16,5
XVII	11	4 30	694,60	19,8	692,40	19,7
XVIII		5 40	694,45	18,5	692,39	18,9

Calculando las diferencias de nivel por 18 trayectorias designadas previamente entre las 74 que se habían observado desde Ocaña, y verificando el mismo cálculo con las 18 de los dos últimos *Estados*, resulta lo que aparece en el siguiente, en que se reproducen todos los datos de que se ha partido.

NIVELACIÓN ENTRE MADRID Y OCAÑA.

$R' = 6369314^{m},663.$ $v = 0^{o}\ 28'\ 12'',598.$

Días.	Horas.	p'	t'	p''	t''	z''_o	R″ — R′
	h m	mm	°	mm	°	° ′ ″	m
21 febrero.	4 50	693,04	3,3	685,70	1,2	90 17 42,32	67,29
22 —	5 0	695,24	6,7	687,84	5,3	47,06	79,29
	5 30	695,49	6,6	687,96	4,8	11,12	65,06
5 marzo.	5 10	691,79	11,8	685,28	9,9	39,65	65,18
9 —	5 10	695,74	7,7	689,16	6,7	44,34	79,56
10 —	4 30	704,38	10,1	697,23	7,9	53,65	67,52
11 —	4 40	709,31	12,8	701,75	10,8	53,06	72,64
12 —	4 40	708,98	13,7	701,59	12,2	55,87	79,57
	5 20	709,10	13,3	701,60	12,0	44,06	80,08
13 —	5 10	709,41	13,0	701,96	10,7	50,17	66,94
	5 30	709,42	12,4	702,05	10,4	40,32	68,28
14 —	5 10	707,27	13,0	700,13	11,0	54,25	70,58
	5 50	707,35	12,0	700,11	10,2	32,52	68,50
15 —	5 10	703,36	15,2	696,28	13,6	53,42	75,92
	5 50	703,51	15,0	696,32	12,9	26,86	62,21
16 —	4 30	701,12	17,8	693,75	18,2	64,06	107,66
	5 10	701,24	18,1	693,77	17,3	51,86	88,80
17 —	4 40	698,48	18,0	691,36	17,8	57,05	96,30

Días	Horas.	p'	t'	p''	t''	z'_o	R″ — R′
	h m	mm	°	mm	°	° ′ ″	m
23 marzo.	4 20	693,63	12,9	686,48	10,7	90 6 30,20	104,96
24 —	4 20	698,57	14,8	691,19	14,7	26,07	75,52
25 —	4 40	700,44	13,3	693,45	10,6	32,16	112,80
27 —	5 0	692,10	8,3	684,91	5,7	31,52	110,49
28 —	5 30	697,30	12,0	690,40	10,7	29,83	93,93
	21 10	698,32	7,9	691,45	6,8	29,84	91,17
29 —	4 50	697,11	13,8	690,43	12,8	35,51	89,58
30 —	5 0	701,88	13,9	694,43	13,6	31,89	76,32
31 —	5 20	705,21	15,7	697,86	14,6	25,53	89,88
	19 30	708,08	8,2	700,71	8,9	2 37,15	120,96
1.° abril.	21 10	708,78	14,3	701,97	15,1	6 5,53	71,32
9 —	4 50	701,01	16,5	693,81	14,2	37,12	104,39
	5 50	700,79	15,9	693,88	14,4	26,97	97,52
	20 50	702,05	11,4	694,68	10,8	23,65	82,85
10 —	4 50	700,30	18,7	693,36	17,8	32,59	87,73
	6 0	700,44	18,6	693,42	16,5	28,74	104,62
11 —	4 30	699,62	20,5	692,40	19,7	32,02	85,03
	5 40	699,53	21,1	692,39	18,9	29,91	104,80

Promedio general... $85^{m},15.$

Aunque el promedio general de los 36 valores no difiere mucho del desnivel obtenido por distancias cenitales simultáneas, examinando las cantidades que forman este promedio, se viene en conocimiento de que el acuerdo es puramente casual, habiéndose hecho sentir de tal manera la considerable distancia y la forma del terreno, que la aproximación aplicada no es suficiente para calcular la diferencia de nivel en el caso actual. Á la verdad, todas las condiciones desfavorables se han reunido, pues hasta se ha observado en hora en que el valor de la refracción difería 4′ del que ha resultado en el resto de la operación; pero como podrían presentarse casos semejantes á éste en nuestra triangulación de primer orden, no parece prudente aplicar este método de observación á lados tan grandes y con tan desfavorables circunstancias.

La triangulación de segundo orden tiene, por el contrario, muy buenas condiciones para el objeto. Habiendo reconocido cuán ventajoso es para los trabajos de orden inferior disminuir la longitud de los lados de esta triangulación, se les ha dado últimamente un valor medio de $15\,000^{m}$; de las diferentes líneas que parten de cada uno de los vértices para unirlo á los demás, y que corresponden á terreno de diversa forma, puede elegirse la que sea más conveniente, considerada bajo todos aspectos; y con los instrumentos de Brunner, que la Junta de Estadística ha destinado á estas observaciones, se obtienen valores bastante precisos de las distancias cenitales aparentes, pues en el círculo vertical se aprecian 5″ por medio de cuatro nonios, hallándose dispuesto el teodolito para observar por el sistema de reiteración.

Sería, pues, conveniente elegir los lados que ofreciesen condiciones más favorables y formasen líneas poligonales en direcciones dadas de antemano, con arreglo á un plan general. Al mismo tiempo que se observasen los ángulos azimutales de la triangulación, podrían hallarse los desniveles de los lados elegidos, por medio de las trayectorias luminosas que vendrían á cada vértice desde el que se hubiera dejado atrás y el que ocupase un lugar más avanzado, en cada uno de los cuales debería hallarse un auxiliar adiestrado en las observaciones barométricas y termométricas. Estos dos auxiliares, con sus correspondientes instrumentos meteorológicos, se arreglarían al orden de marcha del observador, precediéndole el uno y siguiéndole el otro, con lo cual podrían siempre calcularse los desniveles por la estación inferior y por la superior, sin que por esto dejase de observarse, como hasta aquí, la distancia cenital de todos los demás vértices que rodean al punto en que se halle el teodolito, y en cuya altitud no es de temer la acumulación sucesiva de errores. Este sistema podría ensayarse en una de las triangulaciones de segundo orden que se emprendan, procurando aprovechar las circunstancias más favorables, principalmente respecto de las horas de observación.

Para calcular las cotas de los puntos de menor importancia, cuyas distancias cenitales no se hayan observado recíprocamente, se emplean coeficientes de refracción; pero siendo éstos variables en las diferentes comarcas, convendrá adoptar siempre el que se haya determinado en el terreno más próximo al en que se opere.

Por medio de la fórmula (46) ó de la (47) podrán hallarse

los valores de estos coeficientes, según los datos de que se disponga: la primera no exige que las distancias cenitales recíprocas hayan sido simultáneas; la segunda requiere esta condición, que solamente se llenará en trabajos excepcionales. Pero así como para calcular los desniveles se suponen generalmente simultáneas las observaciones cenitales que no son más que recíprocas, también suelen combinarse sus valores para deducir coeficientes de refracción por la fórmula (47), cuyo procedimiento no introducirá grandes errores siempre que se aplique á distancias poco considerables, porque un error de 0,02 en el coeficiente de refracción, no produce, á $10\,000^m$, más que $0^m,15$ de error en la cota del punto observado.

Diversas tentativas se han hecho para determinar el coeficiente de refracción en cada punto, sólo con las observaciones recogidas en él; pero las fórmulas á que se ha llegado, más ingeniosas que útiles, ó se fundan exclusivamente en datos empíricos, que no pueden generalizarse, ó dependen del variable decremento de la temperatura del aire en las diferentes capas de la atmósfera; siendo muy influyente el término que depende de este decremento, y, por consiguiente, inútil observar en un solo punto de la trayectoria luminosa la presión y la temperatura del aire; observaciones que no pueden por sí solas dar la menor idea de las circunstancias en que se hallan las capas superiores é inferiores al punto de estación.

CONCLUSIÓN DE LA PARTE SEGUNDA.

De todo lo dicho en esta segunda parte, resulta:

1.° Que el tercer método de nivelación, expuesto en la parte primera, podría tener extensa aplicación á las triangulaciones de segundo orden en determinadas líneas poligonales convenientemente elegidas, continuando como hasta aquí la medición de distancias cenitales recíprocas, sin observaciones meteorológicas para todos los demás lados que partiesen del punto de estación.

2.° Que de los procedimientos de observación conocidos hasta el día, sólo hay dos aplicables á las nivelaciones que se ejecuten al mismo tiempo que la triangulación: la medición de las distancias cenitales recíprocas, calculándolas como simultáneas, ó esta misma medición acompañada de observaciones meteorológicas en ambos puntos á la vez, para conocer las densidades en los extremos de la trayectoria.

3.° Que para la determinación de desniveles de los puntos de menor importancia, se procure emplear el valor del coeficiente de refracción deducido de los trabajos más próximos, y cuyas circunstancias sean más análogas.

Véanse algunos valores hallados en distintos países para el coeficiente de refracción:

Varios observadores ingleses	0,20
Otros franceses	0,16 0,133
Corabœuf	0,1285
Bessel y Baeyer	0,1370
Gauss	0,1306
Struve	0,1237
Baeyer	0,1401
Ibáñez, Saavedra y Quiroga (en la llanura de Madridejos)	0,1188
Ibáñez, Barraquer y Cabello (entre Madrid y Ocaña)	0,1427

ÍNDICE.

	Páginas.
INTRODUCCIÓN	V
PARTE PRIMERA	9
1.er método de nivelación	10
2.º método	24
3.er método	31
Fórmula para calcular el coeficiente de refracción	46
Fórmulas para el cálculo por el 3.er método	49
Norma del cálculo logarítmico	51
CONCLUSIÓN DE LA PARTE PRIMERA	56
PARTE SEGUNDA	59
Comparación de los barómetros	62
Ídem de los termómetros	64
Observaciones de distancias cenitales simultáneas	68
Observaciones meteorológicas	76
Cálculo de la diferencia de nivel	79
Observaciones de distancias cenitales en Madrid	82
Observaciones meteorológicas	83
CONCLUSIÓN DE LA PARTE SEGUNDA	89

Fig. 1.

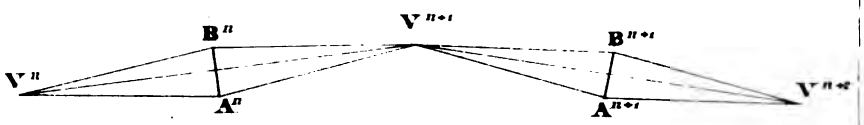


Fig. 2.

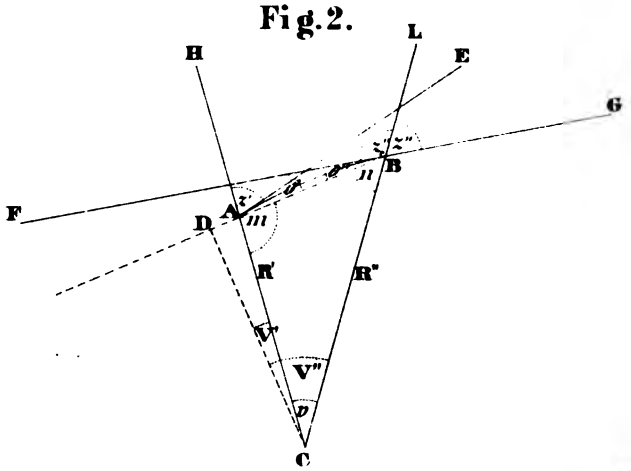


Fig. 3.

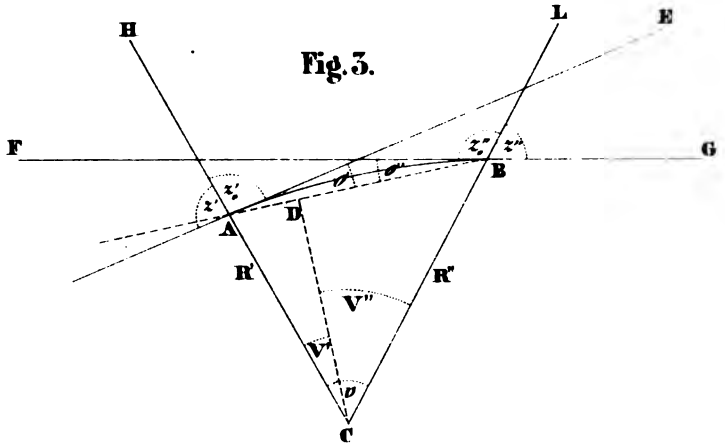
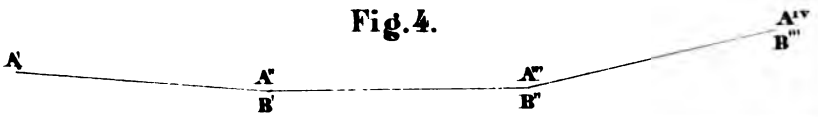


Fig. 4.



Litografía del Instituto Geográfico y Estadístico M.F.

1888.

Eng 498.88
Estudios sobre nivelacion geodesi
Cabot Science 005684813
3 2044 091 939 421